

5.3. Prüfungsaufgaben zur Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1 (10)

Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Skizziere seinen Verlauf.

Lösung

$$f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3 = \frac{3}{4}x^3\left(\frac{3}{8}x - 1\right) \Rightarrow \text{Achsenchnittpunkte } S_{x1}(0|0) \text{ (dreifach } \Rightarrow \text{ SP) und } S_{x2}\left(\frac{8}{3}|0\right) \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{9}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 = \frac{9}{4}x^2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \quad (1)$$

$$f''(x) = \frac{27}{8}x^2 - \frac{9}{2}x = \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{4}x - 1\right) \quad (1)$$

$$f'''(x) = \frac{27}{4}x - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}x - 1\right) \quad (0)$$

$$\text{Tiefpunkt: (} f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{): } T\left(2 \mid -\frac{3}{2}\right) \quad (2)$$

$$\text{Wendepunkte: (} f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \text{): } W_1(0|0) \text{ (Sattelpunkt) und } W_2\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{8}{9}\right) \quad (4)$$

Aufgabe 2 (10)

Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$ auf Achsenschnittpunkte sowie Extrem- und Wendepunkte. Skizziere seinen Verlauf.

Lösung

$$\text{Achsenchnittpunkte: } f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{6}x(x+3)^2 \Rightarrow S_{x1}(0|0) \text{ und } S_{x2}(-3|0) \text{ (doppelt)} \quad (2)$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x+3)(x+1), f''(x) = x+2 \text{ und } f'''(x) = 1 \quad (2)$$

$$\text{Extrempunkte (} f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) </> 0 \text{): } H(-3|0) \text{ und } T(-1 \mid -\frac{2}{3}) \quad (4)$$

$$\text{Wendepunkte (} f''(x) = 0 \text{ mit VZW): } W(-2 \mid -\frac{1}{3}) \quad (2)$$

Aufgabe 3 (10)

Gegeben sind die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$ und der Punkt $P\left(\frac{2}{3} \mid 1\right)$. Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$ auf Achsenschnittpunkte sowie Extrem- und Wendepunkt. Skizziere seinen Verlauf.

Lösung

$$\text{Achsenchnittpunkte: } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{6}x(x-3)^2 \Rightarrow S_{x1}(0|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \text{ (doppelt)} \quad (2)$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-3)(x-1), f''(x) = x-2 \text{ und } f'''(x) = 1 \quad (2)$$

$$\text{Extrempunkte (} f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) </> 0 \text{): } T(3|0) \text{ und } H\left(1 \mid \frac{2}{3}\right) \quad (4)$$

$$\text{Wendepunkte (} f''(x) = 0 \text{ mit VZW): } W\left(2 \mid \frac{1}{3}\right) \quad (2)$$