

5.3. Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

5.3.1. Monotonie und Krümmung einer Kurve

Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 a):

$$\text{Beispiel } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

Symmetrie:

ungerade Funktion mit $f(-x) = -f(x)$
 \Rightarrow punktsymmetrisch zum Ursprung

Achsenchnittpunkte:

$N_1(-2|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|0)$

1. Ableitung

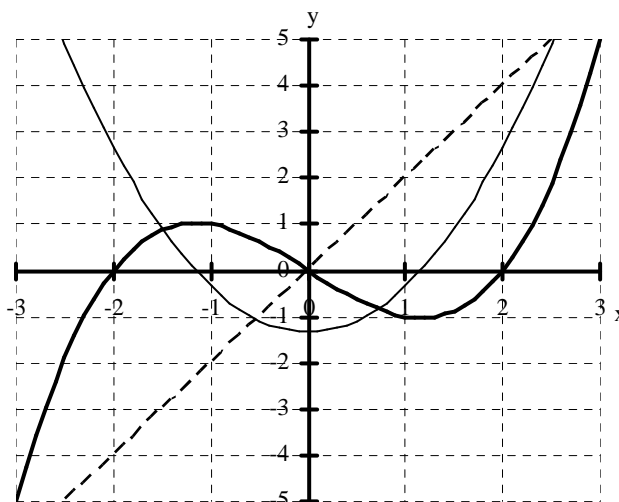
$$f'(x) = x^2 - \frac{4}{3} \text{ mit NST bei } x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

2. Ableitung

$$f''(x) = 2x \text{ mit NST bei } x_3 = 0$$

3. Ableitung

$$f'''(x) = 2$$



Extrempunkte:

$$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = +\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9} \text{ (y-Wert), } f'\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0 \text{ (waagrechte Tangente), } f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2\sqrt{\frac{4}{3}} < 0 \text{ (rechtsgekrümmt)} \Rightarrow$$

$$\text{Tiefpunkt } T\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9}\right) \approx T(-1,15 \mid 1,03)$$

$$f\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9} \text{ (y-Wert), } f'\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0 \text{ (waagrechte Tangente), } f''\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = +2\sqrt{\frac{4}{3}} > 0 \text{ (linksgekrümmt)}$$

$$\Rightarrow \text{Hochpunkt } H\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9}\right) \approx H(1,15 \mid -1,03)$$

Wendepunkte:

$$f(0) = 0 \text{ (y-Wert), } f''(0) = 0 \text{ und } f'''(0) = 2 > 0 \text{ (Tiefpunkt der Steigung)}$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt } W(0|0)$$

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 b)

Definition: Monotonie einer Funktion

f heißt streng monoton $\begin{cases} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ im Intervall $[a;b]$, wenn für $x, x_0 \in [a; b]$ gilt:
$$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \end{array} \right\}$$

Satz: Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen:

Eine auf $[a;b]$ differenzierbare Funktion f ist dort streng monoton $\begin{cases} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{cases}$, wenn $\begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{cases}$ für alle $x_0 \in [a;b]$.

Beweis:

Ergibt sich aus den Definitionen der Monotonie und der Ableitung bzw. des Differentialquotienten.

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 c)

Durch das Monotoniekriterium werden nicht alle Monotoniestellen erfasst, da der Differentialquotient $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ sein kann, obwohl alle Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ sind.

Zum Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$ auf ganz \mathbb{R} streng monoton steigend, obwohl $f'(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0$ verschwindet!

Definition: Krümmung einer differenzierbaren Funktion

Eine auf $[a; b]$ differenzierbare Funktion f heißt dort streng $\left\{ \begin{array}{l} \text{linksgekrümmt (konvex)} \\ \text{rechtsgekrümmt (konkav)} \end{array} \right\}$ wenn ihre Ableitung f' auf $[a; b]$ streng monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ ist.

Satz: Krümmungskriterium für zweimal differenzierbare Funktionen

Eine auf $[a; b]$ zweimal differenzierbare Funktion f ist dort streng $\left\{ \begin{array}{l} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array} \right\}$ wenn ihre 2. Ableitung $\left\{ \begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right\}$ für alle $x \in [a; b]$ ist.

Beweis:

Wende das Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen auf die Ableitung f' an.

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 d)

Durch das Krümmungskriterium werden nicht alle Krümmungsstellen erfasst, da f'' an einer Stelle $x \in [a; b]$ verschwinden kann, obwohl f' auf $[a; b]$ streng monoton steigend oder fallend ist.

Zum Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 1)$ auf ganz \mathbb{R} streng linksgekrümmt, obwohl $f''(x) = 2x^2$ an der Stelle $x = 0$ verschwindet!

5.3.2. Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

Definition: Extrempunkte einer differenzierbaren Funktion

Eine auf $[a; b]$ differenzierbare Funktion f hat an $x \in [a; b]$ einen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{array} \right\}$, wenn $f'(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel von $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ nach } - \\ - \text{ nach } + \end{array} \right\}$.

Satz: Kriterium für Extrempunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion

Eine auf $[a; b]$ zweimal differenzierbare Funktion f hat an $x \in [a; b]$ einen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{array} \right\}$, wenn $f'(x) = 0$ mit $\left\{ \begin{array}{l} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{array} \right\}$.

Beweis:

Wende das Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen auf die Ableitung f' an.

Durch das Extrempunktkriterium werden nicht alle Extrempunkte erfasst, da f'' an einer Stelle $x \in [a; b]$ verschwinden kann, obwohl f' auf $[a; b]$ streng monoton steigend oder fallend ist.

Zum Beispiel hat $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 1)$ in $x = 0$ einen Tiefpunkt. $f'(x) = x^3$ hat aber an dieser Stelle eine dreifache Nullstelle bzw. einen Sattelpunkt, so dass $f''(x) = 3x^2$ ebenfalls verschwindet. In diesem Fall muss f' zusätzlich auf **Vorzeichenwechsel** untersucht werden, um den Wechsel der Steigung zu belegen.

Definition: Wendepunkte und Sattelpunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion

Eine auf $[a; b]$ zweimal differenzierbare Funktion f hat an der Stelle $x \in [a; b]$ einen Wendepunkt, wenn die Krümmungsrichtung dort wechselt. Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen Sattelpunkte.

Kriterium für Wendepunkte einer dreimal differenzierbaren Funktion

Eine auf $[a; b]$ dreimal differenzierbare Funktion f hat an der Stelle $x \in [a; b]$ einen Wendepunkt, wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

Beweis:

Wende das Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen auf die 2. Ableitung f'' an

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 e)

Durch das Wendepunktkriterium werden nicht alle Wendepunkte erfasst, da f''' an einer Stelle $x \in [a; b]$ verschwinden kann, obwohl f'' auf $[a; b]$ streng monoton steigend oder fallend ist.

Zum Beispiel hat $f(x) = \frac{1}{5}(x^5 - 1)$ in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt. $f''(x) = 4x^3$ hat aber an dieser Stelle eine

dreifache Nullstelle bzw. einen Sattelpunkt, so daß $f'''(x) = 12x^2$ ebenfalls verschwindet. In diesem Fall muss f'' zusätzlich auf Vorzeichenwechsel untersucht werden, um den Wechsel der Krümmungsrichtung zu belegen.

Zusammenfassung: hinreichende Kriterien für Extrema und Wendepunkte

| an der Stelle x befindet sich ein | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ |
|-------------------------------------|----------|----------|-----------|
| Hochpunkt, wenn | $=0$ | <0 | beliebig |
| Tiefpunkt, wenn | $=0$ | >0 | beliebig |
| Sattelpunkt, wenn | $=0$ | $=0$ | $\neq 0$ |
| Wendepunkt, wenn | $\neq 0$ | $=0$ | $\neq 0$ |

Tauchen Nullstellenkombinationen auf, die nicht auf eines der Kriterien passen, so müssen zusätzlich f' (\Rightarrow Steigung) und f'' (\Rightarrow Krümmung) auf **Vorzeichenwechsel** untersucht werden!

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 f) - l)

5.3.3. Kurvenscharen und Ortskurven (siehe auch 4.2.8. und 4.2.9.)

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 2 und 3

Beispiel Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4 a)

Beispiel für die Bestimmung einer Ortskurve

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Parabelschar $f_t(x) = x \cdot (x - t)$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösung

Mit $f_t'(x) = 2x - t = 0$ und $f_t''(x) = 2 > 0$) erhält man die Tiefpunkte $T_t \left(\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4} \right)$. Durch Einsetzen von $x = \frac{t}{2}$

bzw. $t = 2x$ in $y = -\frac{t^2}{4}$ erhält man $y = -\frac{(2x)^2}{4} = -x^2$. Die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte ist also $y = -x^2$.

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4

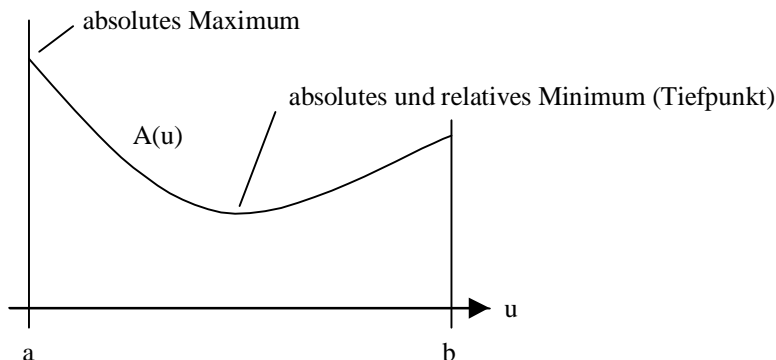
5.3.4. Bestimmung von Funktionsgleichungen (siehe 4.2.10. und 4.5.7.)

Übungen: Aufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

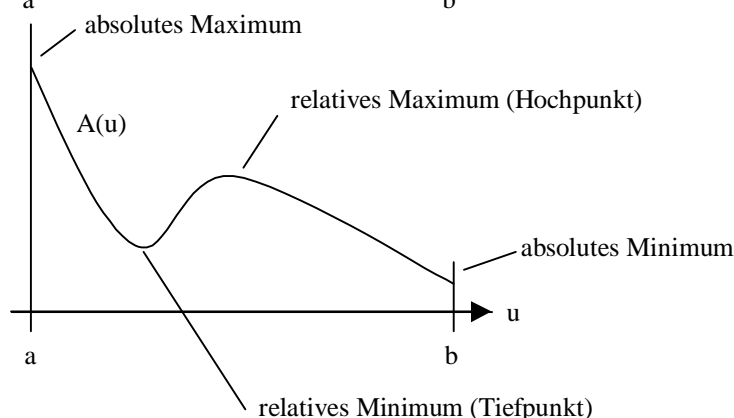
5.3.5. Extremwertaufgaben**Absolutes und relatives Maximum in einem Intervall**

In Extremwertaufgaben wird meistens nach einem $u \in [a; b]$ gefragt, für das eine (Flächen- oder Abstands-)funktion $A(u)$ ihr **absolutes Maximum** bezogen auf das Intervall $[a; b]$ annimmt. Um diese Stelle u zu finden, sucht man zunächst nach **Hochpunkten** der Funktion $A(u)$. Hochpunkte sind jedoch i. A. nur **relative Maxima**, d.h. sie sind Maxima nur in Bezug auf ihre nähere Umgebung, während am **Rande des Intervalls** durchaus noch höhere Punkte liegen können. Die folgende Fälle können auftreten:

1. Im Intervall $[a; b]$ liegt **überhaupt kein** Hochpunkt. (kein relatives Maximum vorhanden)
Das gesuchte absolute Maximum muss dann auf einer der beiden **Intervallgrenzen** liegen:



2. Der Hochpunkt liegt **tiefere als die Intervallgrenzen** (relatives Maximum ist nicht absolutes Maximum)
Das gesuchte absolute Maximum muss ebenfalls auf einer der beiden Intervallgrenzen liegen:



Konsequenz: zusätzlich müssen immer auch noch die Intervallgrenzen eingesetzt werden!

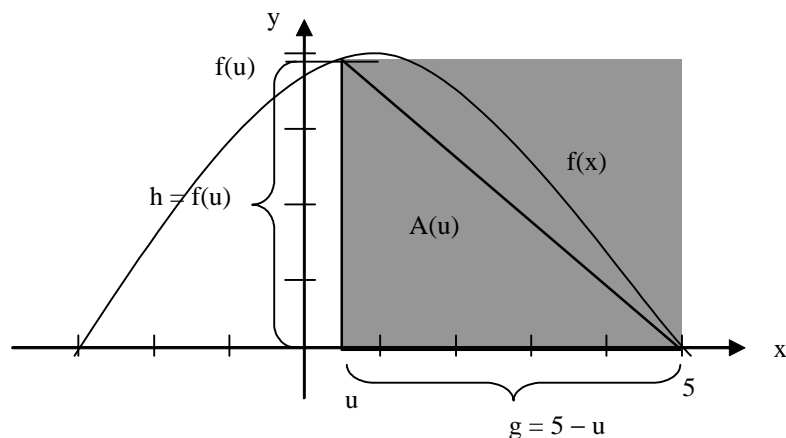
Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 6a)

Beispiel Aufgabe 6 a)

Die Senkrechte $x = u$ sei für $0 \leq u \leq 1$ frei verschiebbar und schneidet die x -Achse im Punkt P und das Schaubild der Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$ im Punkt Q. Die Parabel schneidet die positive x -Achse im Punkt R. Für welches u wird der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal?

Lösung:

Schaubild von $f(x)$



Dreiecksfläche:

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (5-u) \cdot f(u) = \frac{1}{2} \cdot (5-u) \cdot \left(-\frac{1}{4}(u^2 - 2u - 15) \right) = \frac{1}{8}u^3 - \frac{7}{8}u^2 - \frac{5}{8}u + \frac{75}{8}.$$

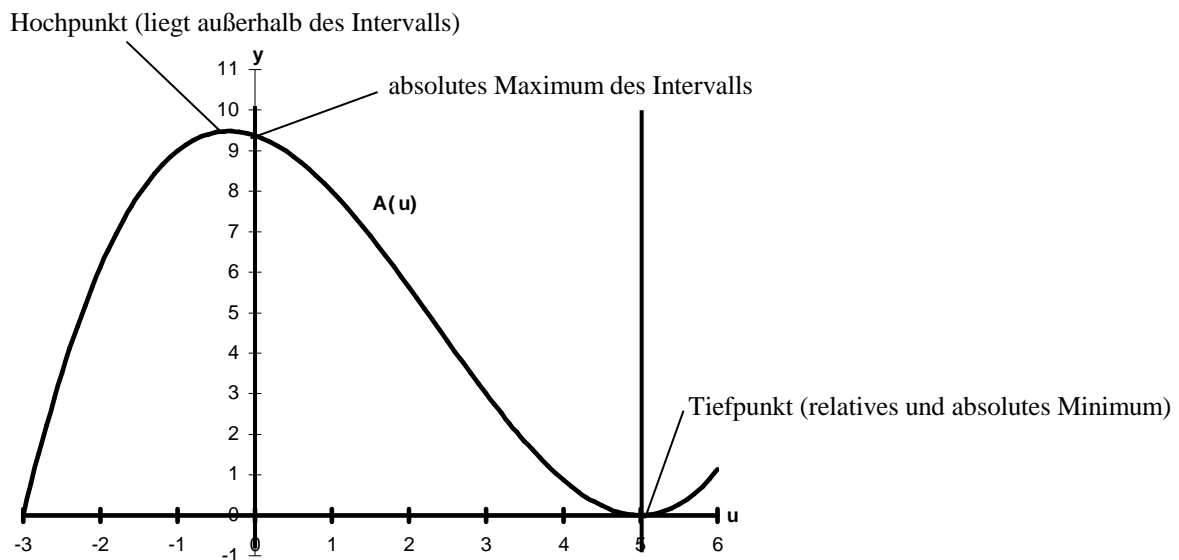
Ableitungen

$$A'(u) = \frac{3}{8}u^2 - \frac{7}{4}u - \frac{5}{8} \text{ und } A''(u) = \frac{3}{4}u - \frac{7}{4}$$

Relatives Maximum (Hochpunkt mit $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) an der Stelle $u_1 = -\frac{1}{3}$ mit $A(-\frac{1}{3}) \approx 10,1$

Relatives Minimum (Tiefpunkt mit $A'(u) = 0$ und $A''(u) > 0$) an der Stelle $u_2 = 5$ mit $A(5) = 0$

Schaubild von A(u)



Gesucht ist das **absolute Maximum** von $A(u)$ im Intervall $0 \leq u \leq 5$. Da kein relatives Maximum im Bereich vorhanden ist, kommen nur die Bereichsgrenzen als absolute Maxima in Frage. Durch Einsetzen dieser Grenzen in $A(u)$ erhält man $A(0) = \frac{75}{8}$ und $A(5) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bzw. maximale Fläche für $u = 0$ mit $A(0) = \frac{75}{8}$.

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 7 - 11

5.3.6. Nullstellenbestimmung mit dem Newton - Verfahren (siehe auch 7.5.)

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ auf 2 Stellen nach dem Komma genau.

Lösung:

Mit Hilfe einer Wertetabelle wird der Bereich, in dem eine Nullstelle x_0 liegen muss, möglichst genau eingegrenzt:

| | | | | | | |
|------|-----|----|----|----|----|-----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | -26 | -7 | -1 | +1 | +3 | +11 |

An dem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte erkennt man, dass zwischen -1 und 0 eine Nullstelle x_0 liegen muss.

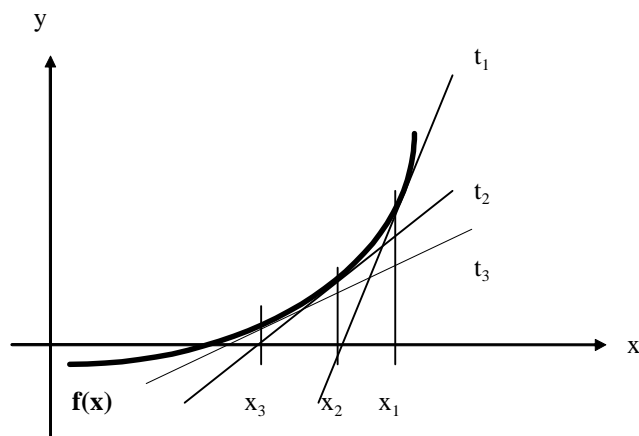
Als erste Näherung für x_0 empfiehlt sich der in der Mitte zwischen -1 und 0 liegende Wert $x_1 = -0,5$. Um vom Startwert $x_1 = -0,5$ aus näher an x_0 heranzugelangen, „zielt“ man mit der Tangente $t_1(x) = x \cdot f'(x_1) + [f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1)]$ durch den Punkt $P(x_1|f(x_1))$ in Richtung x_0 . Die Nullstelle $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ dieser Tangente liegt

bereits näher an x_0 .

Nun „zielt“ man erneut mit Tangente $t_2(x) = x \cdot f'(x_2) + [f(x_2) - x_1 \cdot f'(x_2)]$ durch den Punkt $P(x_2|f(x_2))$ in Richtung x_0 und erhält eine neue Nullstelle $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, die wieder näher an x_0 liegt.

Mit der Tangente t_3 durch den Punkt $P(x_3|f(x_3))$ ergibt sich eine erneut verbesserte Näherung $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$.

Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass die Näherung beliebige Genauigkeiten erreicht:



Wertetabelle:

| n | x_n | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ |
|--------|---------|----------|-----------|
| 1,0000 | -0,5000 | 0,3750 | 1,7500 |
| 2,0000 | -0,7143 | -0,0787 | 2,5306 |
| 3,0000 | -0,6832 | -0,0020 | 2,4002 |
| 4,0000 | -0,6823 | | |

$\Rightarrow x_{02} = 0,68\dots$

Nullstellenbestimmung mit dem Newton-Verfahren

Die Funktion f sei im Intervall $[a; b]$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a; b]$. Die gesuchte Nullstelle x_0 liege im Intervall $[a; b]$ und $x_1 \in [a; b]$ sei ein beliebiger Startwert.

Dann erhält man mit der Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n \geq 1$ eine Folge x_1, x_2, \dots , die beliebig nahe an x_0

herankommt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 12