5.3. Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

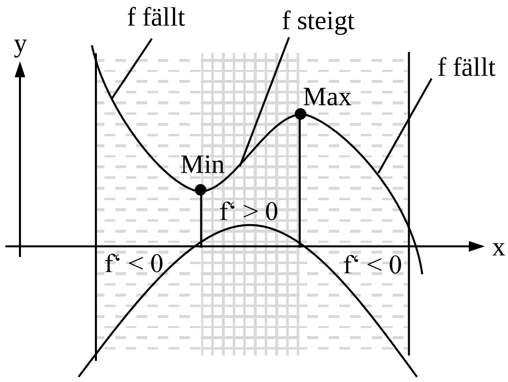
5.3.1. Monotonie und Krümmung einer Kurve

Satz: 1. Ableitung und Monotonie

Eine differenzierbare Funktion f ist streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$ auf [a;b], wenn die 1. Ableitung $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ für alle $x \in [a;b]$ ist.

Satz: 1. Ableitung und lokale Extrema

f hat ein lokales $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ im Punkt $(x_0|f(x_0))$, wenn die 1. Ableitung dort einen VZW von $\begin{Bmatrix}+\text{ zu }-\\ -\text{ zu }+\end{Bmatrix}$ hat.

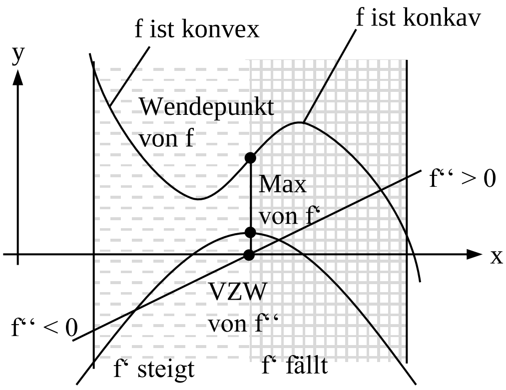


Definition: Krümmung einer Funktion

Eine differenzierbare Funktion f ist $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{Bmatrix}$ auf [a;b], wenn die 1. Ableitung f‘ auf [a;b] streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{steigt}\\ \text{fällt}\end{Bmatrix}$.

Satz: 2. Ableitung und Krümmung

Eine differenzierbare Funktion f ist $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{Bmatrix}$ auf [a;b], wenn die 2. Ableitung f‘‘(x) $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ für alle $x \in [a;b]$ ist

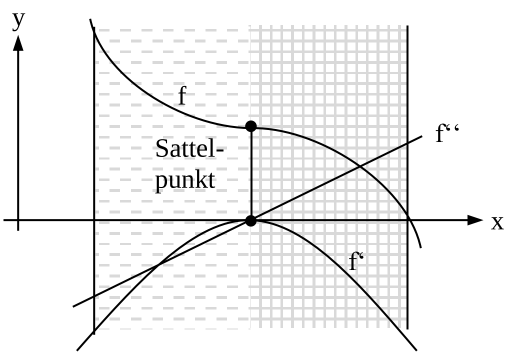


Satz: 2. Ableitung und Wendepunkte

f hat einen **Wendepunkt** $W(x_0|f(x_0))$**,** wenn an dieser Stelle

die **1. Ableitung f‘** ein **Extremum** bzw. gleichwertig

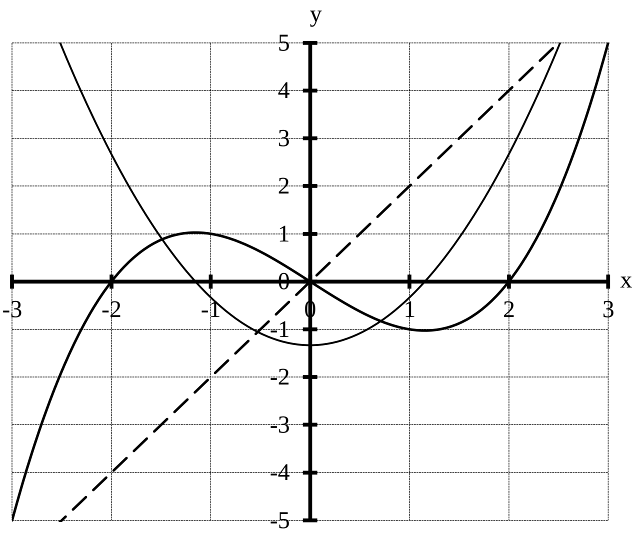
die **2. Ableitung f‘‘** einen **VZW** besitzt.



Sattelpunkte
Wendepunkte mit waagrechter Tangente nennt man **Sattelpunkte.**
Sie treten auf, wenn das **Extremum der 1. Ableitung** die x-Achse **berührt.**

Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 a):

Beispiel $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$



Symmetrie:
ungerade Funktion mit $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung

Achsenschnittpunkte:

$N_1(-2|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|0)$

1. Ableitung

$f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ mit NST bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

2. Ableitung
$f''(x) = 2x$ mit NST bei $x_3 = 0$

Extrempunkte:

$f(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = +\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{8}{9}$ (y-Wert), $f'(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = 0$ (waagrechte Tangente), $f''(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = -2\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$ (f' steigt mit VZW von – nach +)

$\Rightarrow$ **Tiefpunkt** $T(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid \sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{8}{9}) \approx T(-1{,}15|1{,}03)$

$f(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = -\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{8}{9}$ (y-Wert), $f'(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = 0$ (waagrechte Tangente), $f''(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = +2\sqrt{\frac{4}{3}} > 0$ (f' fällt mit VZW von + nach −)

$\Rightarrow$ **Hochpunkt** $H(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{8}{9}) \approx H(1{,}15|-1{,}03)$

Wendepunkte:
$f(0) = 0$ (y-Wert), $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 2 > 0$ (f'' steigt mit VZW von – nach +)

$\Rightarrow$ **Wendepunkt** $W(0|0)$

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 b) – l)

5.3.2. Kurvenscharen und Ortskurven (siehe auch 4.2.8. und 4.2.9.)

Wiederholung Kurvenscharen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 2 und 3

Beispiel Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4 a)

Beispiel für die Bestimmung einer Ortskurve

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Parabelschar $f_t(x) = x\cdot(x - t)$ mit $t \in \mathbb{R}$
Lösung

Mit $f_t'(x) = 2x - t = 0$ und $f_t''(x) = 2 > 0$) erhält man die Tiefpunkte $T_t\left(\frac{t}{2}\middle|-\frac{t^2}{4}\right)$. Durch Einsetzen von $x = \frac{t}{2}$ bzw. $t = 2x$ in $y = -\frac{t^2}{4}$ erhält man $y = -\frac{(2x)^2}{4} = -x^2$. Die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte ist also $y = -x^2$.

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4

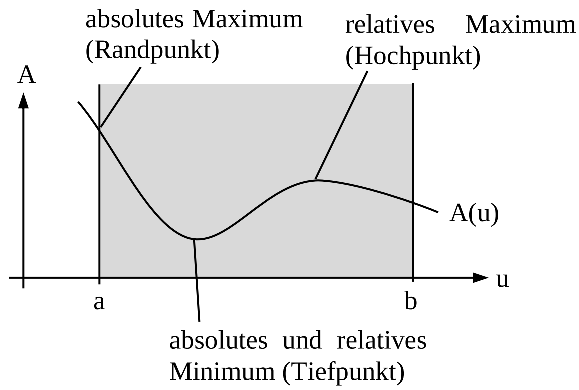
5.3.3. Bestimmung von Funktionsgleichungen (siehe 4.2.10. und 4.5.7.)

Übungen: Aufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

5.3.4. Extremwertaufgaben

Absolutes und relatives Maximum in einem Intervall

In Extremwertaufgaben wird meistens die Stelle $u \in [a;b]$ gesucht, an der eine (Flächen- oder Abstands-) Funktion A(u) ihr **absolutes Maximum bezogen auf das Intervall [a;b]** annimmt.
Dazu sucht man zunächst nach **Hochpunkten** der Funktion A(u).
Hochpunkte sind jedoch i. A. nur **relative Maxima**, d.h. sie sind Maxima nur in Bezug auf ihre nähere Umgebung, während am **Rande des Intervalls** durchaus noch höhere Punkte liegen können.



Konsequenz: zusätzlich müssen immer auch noch die Intervallgrenzen untersucht werden!

Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 6a)

Beispiel Aufgabe 6 a)
Die Senkrechte x = u sei für $0 \le u \le 1$ frei verschiebbar und schneidet die x-Achse im Punkt P und das Schaubild der Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$ im Punkt Q. Die Parabel schneidet die positive x-Achse im Punkt R. Für welches u wird der Flächeninhalt des Dreieckes PQR maximal?

Lösung:

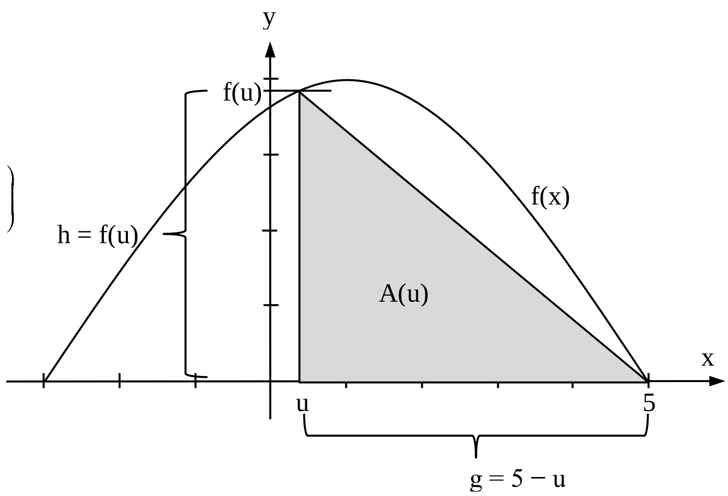
Dreiecksfläche:

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h \\ &= \frac{1}{2}\cdot(5-u)\cdot f(u) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(5-u)\cdot\left(-\frac{1}{4}\ u^2 - 2u - 15\right) \\ &= \frac{1}{8}u^3 - \frac{7}{8}u^2 - \frac{5}{8}u + \frac{75}{8}. \end{aligned}$$

Ableitungen:

$$A'(u) = \frac{3}{8}u^2 - \frac{7}{4}u - \frac{5}{8} \text{ und}$$

$$A''(u) = \frac{3}{4}u - \frac{7}{4}$$

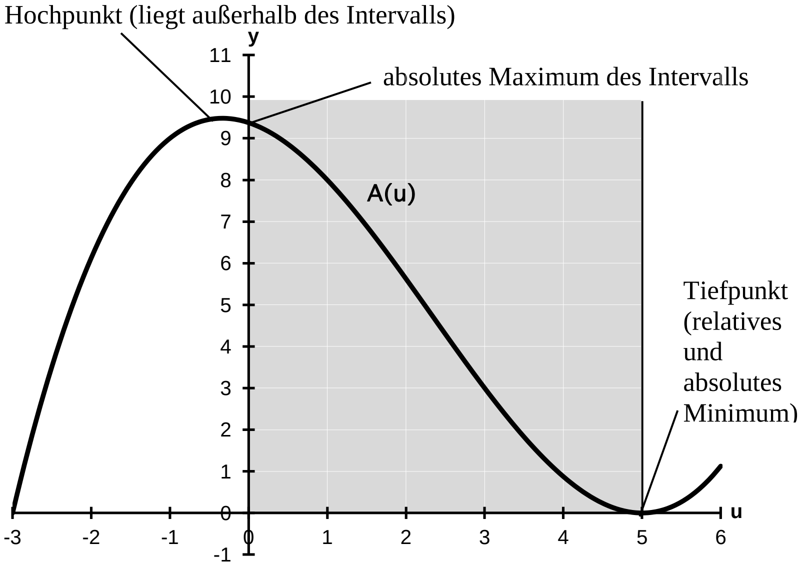


Relatives Maximum
(Hochpunkt mit A'(u) = 0 und A''(u) < 0)
an der Stelle $u_1 = -\frac{1}{3}$ mit $A(-\frac{1}{3}) \approx 10{,}1$

Relatives Minimum
(Tiefpunkt mit A'(u) = 0 und A''(u) > 0)
an der Stelle $u_2 = 5$ mit $A(5) = 0$

Schaubild von A(u)
Da kein relatives Maximum im Bereich $0 \le u \le 5$ vorhanden ist, kommen nur die **Bereichsgrenzen** als absolute Maxima in Frage.
Durch Einsetzen dieser Grenzen in A(u) erhält man $A(0) = \frac{75}{8}$ und $A(5) = 0$

$\Rightarrow$ absolutes Max bzw. maximale Fläche für u = 0 mit $A(0) = \frac{75}{8}$.



Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 7 - 11

5.3.5. Nullstellenbestimmung mit dem Newton - Verfahren (siehe auch 7.5.)

Beispiel:
Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ auf 2 Stellen nach dem Komma genau.

Lösung:
Mit Hilfe einer Wertetabelle wird der Bereich, in dem eine Nullstelle x_0 liegen muss, möglichst genau eingegrenzt:

x	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	−26	−7	−1	+1	+3	+11

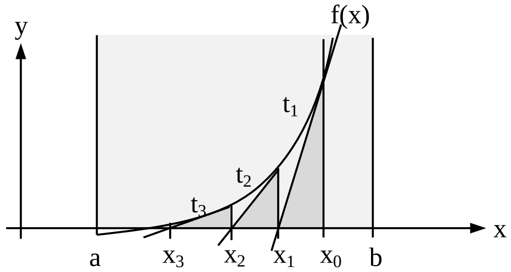
0. An dem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte erkennt man, dass zwischen −1 und 0 eine Nullstelle x_0 liegen muss. Als erste Näherung für x_0 empfiehlt sich der in der Mitte zwischen −1 und 0 liegende Wert $x_1 = -0{,}5$.

1. Um vom Startwert $x_1 = -0{,}5$ aus näher an x_0 heran zu gelangen, „zielt" man mit der Tangente $t_1(x) = x\cdot f'(x_1) + [f(x_1) - x_1\cdot f'(x_1)]$ durch den Punkt $P(x_1|f(x_1))$ in Richtung x_0. Die Nullstelle $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ dieser Tangente liegt bereits näher an x_0.

2. Nun „zielt" man erneut mit Tangente $t_2(x) = x\cdot f'(x_2) + [f(x_2) - x_1\cdot f'(x_2)]$ durch den Punkt $P(x_2|f(x_2))$ in Richtung x_0 und erhält eine neue Nullstelle $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, die wieder näher an x_0 liegt.

3. Mit der Tangente t_3 durch den Punkt $P(x_3|f(x_3))$ ergibt sich eine erneut verbesserte Näherung $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$.

Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass die Näherung beliebige Genauigkeiten erreicht:



Wertetabelle:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1,0000	−0,5000	0,3750	1,7500
2,0000	−0,7143	−0,0787	2,5306
3,0000	−0,6832	−0,0020	2,4002
4,0000	−0,6823		

$\Rightarrow x_{02} = 0{,}68...$

Nullstellenbestimmung mit dem Newton-Verfahren
Die Funktion f sei im Intervall [a; b] differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a; b]$. Die gesuchte Nullstelle x_0 liege im Intervall [a; b] und $x_1 \in [a, b]$ sei ein beliebiger Startwert.
Dann erhält man mit der **Rekursionsformel** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n \geq 1$ eine Folge $x_1, x_2, ...$, die gegen x_0 **konvergiert**: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 12