

## 5.4. Aufgaben zur Kurvenuntersuchung zusammengesetzter Funktionen

### Aufgabe 1: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen

Untersuche das Schaubild der Funktion  $f$  auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = x \cdot e^x$	d) $f(x) = x + e^{-\frac{x}{e}}$	g) $f(x) = \frac{2}{e}x + e^{-x^2}$
b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$	e) $f(x) = -\frac{e}{2}x^2 + e^x$	h) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
c) $f(x) = e^{-x^2}$	f) $f(x) = \frac{1}{e}x - e^{x-2}$	i) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

### Aufgabe 2: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen mit Parameter

Untersuche das Schaubild der Funktion  $f_t$  in Abhängigkeit von  $t > 0$  auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Extrem- und Wendepunkte und skizziere ihren Verlauf für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

Beschreibe in Worten, wie sich das Schaubild mit wachsenden  $t > 0$  ändert.

Beschreibe das Wachstumsverhalten der Schaubilder für  $x \rightarrow \infty$ : Handelt es sich um lineares, exponentielles, beschränktes oder logistisches Wachstum?

a) $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$	c) $f_t(x) = \frac{e}{t}x - e^{\frac{x}{t}}$	e) $f_t(x) = 100 - 100e^{-tx}$
b) $f_t(x) = e^{-(x-t)^2}$	d) $f_t(x) = e^{\frac{t \cdot x}{e}} - t \cdot x$	f) $f_t(x) = \frac{100}{1 + 100 \cdot e^{-tx}}$

### Aufgabe 3: Kurvendiskussion von Logarithmusfunktionen

Untersuche das Schaubild der Funktion  $f$  auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	b) $f(x) = (\ln x)^2$	c) $f(x) = (\ln x)^3$
-----------------------------	-----------------------	-----------------------

### Aufgabe 4: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen

Untersuche das Schaubild der Funktion  $f$  auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = \frac{4x}{1-x^2}$	b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$	c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	d) $f(x) = \frac{x^2-7x+11}{x-5}$
------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	-----------------------------------

### Aufgabe 5: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen mit Parameter

Untersuche die folgenden Funktionen in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ , Extrem- und Wendepunkte und skizziere ihren Verlauf für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ . Gib außerdem die Ortskurven der Extrem- und Wendepunkte an.

a) $f_t(x) = x + \frac{4t^3}{(x-t)^2}$	c) $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2}$	e) $f_t(x) = \frac{x+t}{(x-t)^2}$
b) $f_t(x) = x + t + \frac{1}{x-t}$	d) $f_t(x) = \frac{x}{(x-t)^2}$	f) $f_t(x) = x + 3t + \frac{4t^2}{x-t}$

### Aufgabe 6: Vermischte Aufgaben zu Funktionenscharen

- a) Gegeben sind die Funktionen  $f_t(x) = tx^2 \cdot e^{-\frac{x}{t}}$  für  $t > 0$ . Berechnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte. Geben Sie die Gleichung der Parabel an, die jeweils durch beide Extrempunkte verläuft und außerdem symmetrisch zur y-Achse ist.
- b) Berechnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte und der Wendepunkte von  $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$  für  $t > 0$ .
- c) Berechnen Sie die Schnittpunkte und die Schnittwinkel der Funktionen  $f_t(x) = e^{tx}$  und  $g_t(x) = e^{-\frac{x}{t}}$  für  $t > 0$ .
- d) Berechnen Sie die Fläche, die die Wendetangente von  $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$  für  $t > 0$  mit den Koordinatenachsen einschließt.
- e) Zeigen Sie, dass die Fläche, die die Wendetangente von  $f_t(x) = (t^2x + t) \cdot e^{-tx}$  für  $t > 0$  mit den Koordinatenachsen einschließt, unabhängig von  $t$  ist.
- f) Für welche Werte von  $t$  berührt das Schaubild von  $f_t(x) = x + e^{t-x}$  die x-Achse?
- g) Für welche Werte von  $t$  hat das Schaubild von  $f_t(x) = e^{tx} + k \cdot e^{(t+1)x}$  einen Wendepunkt? Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
- h) Zeigen Sie, dass die Schaubilder der Funktionen  $f_t(x) = e^{tx}$  für  $t > 0$  alle durch einen gemeinsamen Punkt  $P$  gehen. Die Tangenten und die Normalen durch  $P$  begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welchen Wert von  $t$  wird der Flächeninhalt dieses Dreieckes minimal?
- i) Für welches  $t$  hat der Schnittpunkt von  $f_t(x) = \frac{x + 2 + \ln(x + t)}{x + t}$  mit der Geraden  $y = 1$  den kleinsten Abstand von der x-Achse?

### Aufgabe 7: Extremwertaufgaben mit Exponentialfunktionen

- a) Welches Rechteck zwischen der x-Achse und dem Schaubild von  $f(x) = e^{-x^2}$  hat den größten Inhalt?
- b) Welches Rechteck im 1. Quadranten unter dem Schaubild von  $f(x) = e^{-x}$  hat den größten Inhalt?
- c) Welches Rechteck im 1. Quadranten unter dem Schaubild von  $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$  hat den größten Inhalt?

### Aufgabe 8: Tangenten und Normalen an Exponentialfunktionen

- a) Die Tangente und die Normale am Schaubild von  $f_t(x) = e^{tx}$  mit  $t > 0$  im Punkt  $P(0|1)$  begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welches  $t$  wird sein Flächeninhalt minimal und wie groß ist dieser?
- b) Untersuchen Sie das Schaubild von  $f_t(x) = tx \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-3)}$  mit  $t \in \mathbb{R}^+$  auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Die Tangente an das Schaubild von  $f_t$  im Punkte  $A(\sqrt{3} | t\sqrt{3})$  bildet zusammen mit der x-Achse und der Geraden  $g_t(x) = \frac{1}{2t^2} \cdot x$  ein Dreieck. Für welches  $t$  ist der Inhalt dieses Dreieckes am größten? Berechnen Sie den größten Flächeninhalt

### Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit rationale Funktionen

- a) Welches Rechteck mit dem Inhalt  $A = 36 \text{ cm}^2$  hat den kleinsten Umfang?
- b) Welcher Kreisabschnitt mit dem Inhalt  $A = 100 \text{ cm}^2$  hat den kleinsten Umfang?
- c) Welcher Punkt auf dem Schaubild von  $f(x) = \frac{2}{x^2}$  hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? **Hinweis:** Da die Wurzelfunktion monoton steigt, ist  $\sqrt{A}$  genau dann minimal, wenn  $A$  minimal ist.
- d) Welches Rechteck zwischen der x-Achse und dem Schaubild von  $f(x) = \frac{20}{x^2 + 5}$  hat den größten Inhalt?
- e) Der Querschnitt eines unterirdischen Entwässerungskanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis und soll eine Fläche von  $8 \text{ m}^2$  haben. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch für die Ausmauerung minimal wird.
- f) Berechnen Sie die Abmessungen einer Konservendose aus Weißblech, die bei minimalem Materialverbrauch einen Inhalt von einem Liter haben soll.
- g) Ein Metallgefäß hat die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel und soll einen Inhalt von einem Liter haben. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch minimal wird.
- h) Ein Blechkasten soll die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche haben und einen Inhalt von einem Liter fassen. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch minimal wird.

## 5.4. Lösungen zu den Aufgaben zur Kurvenuntersuchung zusammengesetzter Funktionen

### Aufgabe 1: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen

- a)  $f(x) = x \cdot e^x$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkt  $S(0|0)$ , Asymptote  $y = 0$ , da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ .  $f'(x) = (1+x) \cdot e^x$ ,  $f''(x) = (2+x) \cdot e^x$  und  $f'''(x) = (3+x) \cdot e^x \Rightarrow T(-1 | -\frac{1}{e}) \approx T(-1 | -0,368)$  und  $W(-2 | -\frac{2}{e^2}) \approx W(-2 | -0,271)$
- b)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte:  $S(0|0)$  doppelt  $\Rightarrow$  Berührungspunkt und Minimum, da  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ; Asymptote  $y = 0$ , da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f'(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$ ,  $f''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x}$  und  $f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6) \cdot e^{-x} \Rightarrow T(0|0)$  und  $H(2 | \frac{4}{e^2}) \approx H(2 | 0,54)$  und  $W_1(2 - \sqrt{2} | f(2 - \sqrt{2})) \approx W_1(0,59 | 0,19)$  und  $W_2(2 + \sqrt{2} | f(2 + \sqrt{2})) \approx W_2(3,41 | 0,38)$
- c)  $f(x) = e^{-x^2}$ : Symmetrie zur y-Achse, da  $f(-x) = f(x)$ , Achsenschnittpunkte  $S_y(0|1)$ , Asymptote  $y = 0$ , da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f'(x) = -2x e^{-x^2}$  und  $f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2} \Rightarrow H(0|1)$  und  $W_{1/2}(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} | \frac{1}{\sqrt{e}})$
- d)  $f(x) = x + e^{-\frac{x}{e}}$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte:  $S_y(0|1)$  und  $S_x(-e|0)$ , Asymptote  $g(x) = x$  für  $x \rightarrow +\infty$ , da  $f(x) - g(x) = e^{-\frac{x}{e}} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f'(x) = 1 - \frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{x}{e}} = 1 - e^{-\frac{x}{e}-1}$  und  $f''(x) = \frac{1}{e^2} \cdot e^{-\frac{x}{e}} = e^{-\frac{x}{e}-2} \Rightarrow T(-e|0)$
- e)  $f(x) = -\frac{e}{2} x^2 + e^x$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte:  $S_y(0|1)$  und  $S_x(-0,627|0)$ , Näherungskurve  $g(x) = -\frac{e}{2} x^2$  für  $x \rightarrow -\infty$ , da  $f(x) - g(x) = e^x \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ .  $f'(x) = -ex + e^x$ ,  $f''(x) = -e + e^x$  und  $f'''(x) = e^x \Rightarrow S(1 | \frac{e}{2}) \approx S(1 | 1,36)$
- f)  $f(x) = \frac{1}{e} x - e^{x-2}$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte:  $S_y(0 | -\frac{1}{e^2})$  und  $S_x(1|0)$ , Asymptote:  $g(x) = \frac{1}{e} x$  für  $x \rightarrow -\infty$ , da  $f(x) - g(x) = e^{x-2} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ .  $f'(x) = \frac{1}{e} - e^{x-2}$ ,  $f''(x) = -e^{x-2}$  und  $f'''(x) = -e^{x-2} \Rightarrow H(1|0)$
- g)  $f(x) = \frac{2}{e} x + e^{-x^2}$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte:  $S_y(0|1)$  und  $S_x(-0,761|0)$ , Asymptote:  $g(x) = \frac{2}{e} x$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ , da  $f(x) - g(x) = e^{-x^2} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .  $f'(x) = \frac{2}{e} - 2x e^{-x^2}$  und  $f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2} \Rightarrow H(1 | \frac{3}{e})$  und  $W_{1/2}(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} | \pm \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e} + \frac{1}{\sqrt{e}})$
- h)  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ : Symmetrie zur y-Achse, da  $f(-x) = f(x)$  und  $f(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , Achsenschnittpunkte:  $S_y(0|1)$ , keine Asymptoten.  $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  und  $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x) \Rightarrow T(0|1)$
- i)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ : keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsenschnittpunkte  $S_y(0 | \frac{1}{2})$ , Asymptoten:  $g_1(x) = 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ : und  $g_2(x) = 1$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f'(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$  und  $f''(x) = \frac{-4(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} \Rightarrow W(0 | \frac{1}{2})$

## Aufgabe 2: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen mit Parameter

- a)  $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$ : Achsenschnittpunkt  $S(0|0)$ , Asymptote  $y = 0$ , da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x)e^{-tx}$  und  $f_t''(x) = (tx - 2) \cdot e^{-tx} \Rightarrow H(\frac{1}{t} | \frac{1}{et^2})$  und  $W(\frac{2}{t} | \frac{1}{e^2 t^2})$ . Exponentielle Abnahme, die mit steigendem Wachstumsfaktor  $t$  immer schneller verläuft
- b)  $f_t(x) = e^{-(x-t)^2}$ : Achsenschnittpunkt  $S(0 | e^{-t^2})$ , Asymptote  $y = 0$ , da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .  $f_t'(x) = -2(x-t) e^{-(x-t)^2}$  und  $f_t''(x) = -2(1 - 2(x-t)^2) e^{-(x-t)^2} \Rightarrow H(t|1)$  und  $W_{1/2}(t \pm \frac{1}{\sqrt{2}} | \frac{1}{\sqrt{e}})$ . Exponentielle Abnahme, die mit steigendem Verschiebungsparameter  $t$  immer später einsetzt
- c)  $f_t(x) = \frac{e}{t} x - e^t$ : Achsenschnittpunkte  $S_x(t|0)$  und  $S_y(0|-1)$ , Asymptote  $g_t(x) = \frac{e}{t} x$  für  $x \rightarrow -\infty$ , da  $f_t(x) - g_t(x) = e^t \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ .  $f_t'(x) = \frac{e}{t} - \frac{1}{t} e^x$  und  $f_t''(x) = -\frac{1}{t^2} e^x \Rightarrow H(t|0)$ . Exponentielles Wachstum, das mit steigendem  $t$  immer langsamer verläuft.
- d)  $f_t(x) = e^{\frac{t-x}{e}} - t \cdot x$ : Achsenschnittpunkte  $S_x(\frac{e}{t} | 0)$  und  $S_y(0|1)$ , Asymptote  $g_t(x) = tx$  für  $x \rightarrow -\infty$ , da  $f_t(x) - g_t(x) = e^{\frac{t-x}{e}} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ .  $f_t'(x) = \frac{t}{e} e^{\frac{t-x}{e}} - t$  und  $f_t''(x) = \left(\frac{t}{e}\right)^2 e^{\frac{t-x}{e}} \Rightarrow H(\frac{e}{t} | 0)$ . Exponentielles Wachstum für  $x \rightarrow +\infty$ , das mit steigendem Wachstumsfaktor  $t$  immer schneller verläuft.
- e)  $f_t(x) = 100 - 100e^{-tx}$ : Achsenschnittpunkt  $S(0|0)$ , Asymptote  $g(x) = 100$  für  $x \rightarrow +\infty$ , da  $f_t(x) - g(x) = 100e^{-tx} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f_t'(x) = 100te^{-tx}$  und  $f_t''(x) = -100t^2e^{-tx}$ . Beschränktes Wachstum mit Schranke  $S = 100$ , das mit steigendem Wachstumsfaktor  $t$  immer schneller verläuft.
- f)  $f_t(x) = \frac{100}{1 + 100 \cdot e^{-tx}}$ : Achsenschnittpunkt  $S_y(0 | \frac{100}{101})$ , Asymptoten:  $g_1(x) = 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ , da  $f_t(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $g_2(x) = 100$  für  $x \rightarrow +\infty$ , da  $f_t(x) \rightarrow 100$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f_t'(x) = \frac{10000 \cdot t \cdot e^{-tx}}{(1 + 100 \cdot e^{-tx})^2}$  und  $f_t''(x) = \frac{10000 \cdot t^2 \cdot e^{-tx} (100 \cdot e^{-tx} - 1)}{(1 + 100 \cdot e^{-tx})^3} \Rightarrow W(\frac{\ln 100}{t} | 50)$ . Logistisches Wachstum mit Schranke  $S = 100$ , das mit steigendem Wachstumsfaktor  $t$  immer schneller verläuft.

## Aufgabe 3: Kurvendiskussion von Logarithmusfunktionen

- a)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ : Achsenschnittpunkt:  $S_x(1|0)$ , Asymptoten: negative y-Achse, da  $f(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0^+$  und positive x-Achse, da  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ .  $f'(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$  und  $f''(x) = \frac{1}{x^3} (2 \ln x - 3) \Rightarrow H(e | \frac{1}{e})$  und  $W(e^{1,5} | \frac{1,5}{e^{1,5}}) \approx W(4,48 | 0,33)$
- b)  $f(x) = (\ln x)^2$ : Achsenschnittpunkt:  $S_x(1|0)$  (doppelt), Asymptote: positive y-Achse, da  $f(x) \rightarrow +\infty$  für  $x \rightarrow 0^+$ .  $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$  und  $f''(x) = \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \Rightarrow T(1|0)$  und  $W(e|1)$
- c)  $f(x) = (\ln x)^3$ : Achsenschnittpunkt:  $S_x(1|0)$  (dreifach), Asymptote: negative y-Achse, da  $f(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0^+$ .  $f'(x) = \frac{3(\ln x)^2}{x}$ ,  $f''(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \ln x \cdot (2 - \ln x) \Rightarrow W(1|0)$  (Sattelpunkt) und  $W(e^2|8)$

#### Aufgabe 4: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen

a)  $f(x) = \frac{4x}{1-x^2} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$ :  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , Punktsymmetrie am Ursprung, da  $f(-x) = -f(x)$ ,

Achsen Schnittpunkt:  $S(0|0)$ , senkrechte Asymptoten bei  $x = \pm 1$ , da NST nur im Nenner, waagrechte Asymptote  $y = 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ , da Nennergrad > Zählergrad.  $f'(x) = \frac{4(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$  und  $f''(x) = \frac{8x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} \Rightarrow$

$W(0|0)$

b)  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{4x}{(x-1)^2}$ :  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , keine Symmetrie, da  $f(-x) \neq \pm f(x)$ , Achsen Schnittpunkte

$S_y(0|1)$  und  $S_x(-1|0)$ , senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 1$ , da zweifache NST nur im Nenner, waagrechte Asymptote  $y = 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ , da  $f(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ .  $f'(x) = -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$  und  $f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$

$\Rightarrow T(-1|0)$  und  $W(-2|\frac{1}{9})$

c)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$ :  $D = \mathbb{R}$ , Symmetrie zur y-Achse, da  $f(-x) = f(x)$ , Achsen Schnittpunkte  $S_y(0|-1)$

und  $S_{x1/2}(\pm 1|0)$ , waagrechte Asymptote  $y = 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ , da  $f(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ .  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$  und

$$f''(x) = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow T(0|-1) \text{ und } W_{1/2}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} | -\frac{1}{2}).$$

d)  $f(x) = \frac{x^2-7x+11}{x-5} = x-2 + \frac{1}{x-5}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ , keine Symmetrie, Achsen Schnittpunkte:  $S_y(0|-\frac{11}{5})$  und

$S_{x1/2}(\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} | 0)$ , senkrechte Asymptote bei  $x = 5$ , da NST nur im Nenner, schiefe Asymptote  $g(x) = x -$

2 für  $x \rightarrow \pm \infty$ , da  $f(x) - g(x) = \frac{2}{x^2+1} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ .  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+24}{(x-5)^2}$  und  $f''(x) =$

$$\frac{2}{(x-5)^3} \Rightarrow H(4|1) \text{ und } T(6|5)$$

#### Aufgabe 5: Rationale Funktionen mit Parameter

a)  $f_t(x) = x + \frac{4t^3}{(x-t)^2} = \frac{x^3 - 2tx^2 + t^2x + 4t^3}{(x-t)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ ,  $S_y(0|4t)$ ,  $S_x(t|0)$ , senkrechte Asymptote mit

VZW bei  $x = t$  und schiefe Asymptote  $y = x$ .  $f_t'(x) = 1 - \frac{8t^3}{(x-t)^3}$  und  $f_t''(x) = \frac{24t^3}{(x-t)^4} \Rightarrow H(3t|4t)$  mit

$$\text{Ortskurve } y = \frac{4}{3}x$$

b)  $f_t(x) = x + t + \frac{1}{x-t} = \frac{x^2 - t^2 + 1}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|-\frac{1}{t})$ ,  $S_x(\pm \sqrt{t^2-1} | 0)$  ohne VZW nur für  $|t| \geq 1$ ,

senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = t$  und schiefe Asymptote  $y = x + t$ .  $f_t'(x) = 1 - \frac{1}{(x-t)^2}$  und  $f_t''(x) =$

$$\frac{2}{(x-t)^3} \Rightarrow H(t-1|2t-2) \text{ mit Ortskurve } y = 2x \text{ und } T(t+1|2t+2) \text{ mit der gleichen Ortskurve } y = 2x (!)$$

c)  $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $S_x(t|0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 0$  und

waagrechte Asymptote  $y = 0$ .  $f_t'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3} = \frac{2t-x}{x^3}$  und  $f_t''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6t}{x^4} = \frac{2x-6t}{x^4} \Rightarrow H(2t|\frac{1}{4t})$

mit Ortskurve  $y = \frac{1}{2x}$  und  $W(3t|\frac{2}{9t^2})$  mit Ortskurve  $y = \frac{2}{x^2}$ .

- d)  $f_t(x) = \frac{x}{(x-t)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|0)$  mit VZW, senkrechter Asymptote ohne VZW bei  $x = t$  und waagrechter Asymptote  $y = 0$ .  $f_t'(x) = -\frac{x+t}{(x-t)^3}$  und  $f_t''(x) = \frac{2x+4t}{(x-t)^4} \Rightarrow T(-t | -\frac{1}{4t})$  mit Ortskurve  $y = \frac{1}{4x}$  und  $W(-2t | -\frac{2}{9t})$  mit Ortskurve  $y = \frac{4}{9x}$ .
- e)  $f_t(x) = \frac{x+t}{(x-t)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0 | \frac{1}{t})$ ,  $S_x(-t|0)$  mit VZW, senkrechter Asymptote ohne VZW bei  $x = t$  und waagrechter Asymptote  $y = 0$ .  $f_t'(x) = -\frac{x+3t}{(x-t)^3}$  und  $f_t''(x) = \frac{2x-8t}{(x-t)^4} \Rightarrow T(-3t | -\frac{1}{8t})$  mit Ortskurve  $y = \frac{3}{8x}$  und  $W(4t | \frac{5}{4t})$  mit Ortskurve  $y = \frac{5}{x}$ .
- f)  $f_t(x) = x + 3t + \frac{4t^2}{x-t} = \frac{(x+t)^2}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|-1)$ ,  $S_x(-t|0)$  ohne VZW, senkrechter Asymptote mit VZW bei  $x = t$  und schiefer Asymptote  $y = x + 3t$ .  $f_t'(x) = 1 - \frac{4t^2}{(x-t)^2} = \frac{x^2 - 2tx - 3t^2}{(x-t)^2}$  und  $f_t''(x) = \frac{8t^2}{(x-t)^3} \Rightarrow H(-t|0)$  mit Ortskurve  $y = 0$  und  $T(3t|8t)$  mit Ortskurve  $y = \frac{8}{3}x$ .

### Aufgabe 6: Vermischte Aufgaben zu Funktionenscharen

- a)  $f_t'(x) = (2tx - x^2) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$  und  $f_t''(x) = (\frac{1}{t}x^2 - 4x + 2t) \cdot e^{-\frac{x}{t}} \Rightarrow T(0|0)$  und  $H_t(2t | \frac{4t^3}{e^2}) \Rightarrow$  Ortskurve der Hochpunkte  $y = \frac{1}{2e^2}x^3$  und achsensymmetrische Parabel durch  $T$  und  $H_t$   $p_t(x) = \frac{t}{e^2}x^2$ .
- b)  $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x) \cdot e^{-tx}$  und  $f_t''(x) = (tx - 2) \cdot e^{-tx} \Rightarrow H(\frac{1}{t} | \frac{1}{te})$  und  $W(\frac{2}{t} | \frac{2}{t^2e^2}) \Rightarrow$  Ortskurven  $y = \frac{1}{e}x$  für die Hochpunkte und  $y = \frac{2}{e^2}x^2$  für die Wendepunkte
- c) Schnittpunkte  $S_{f_g}(0|1)$  und Schnittwinkel  $\alpha_{f_g} = 90^\circ$
- d)  $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x) \cdot e^{-tx}$  und  $f_t''(x) = (tx - 2) \cdot e^{-tx} \Rightarrow W_t(\frac{2}{t} | \frac{2}{t^2e^2}) \Rightarrow$  Wendetangente  $w_t(x) = -\frac{1}{te^2}x + \frac{4}{t^2e^2}$  mit den Achsenschnittpunkten  $S_{y_t}(0 | \frac{4}{t^2e^2})$  und  $S_{x_t}(\frac{4}{t} | 0) \Rightarrow$  Dreiecksfläche  $A_t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{t^2e^2} \cdot \frac{4}{t} = \frac{8}{t^3e^2}$
- e)  $f_t'(x) = -t^3x \cdot e^{-tx}$  und  $f_t''(x) = (t^4x - t^3) \cdot e^{-tx} \Rightarrow W(\frac{1}{t} | \frac{2t}{e}) \Rightarrow$  Wendetangente  $w_t(x) = -\frac{t^2}{e}x + \frac{3t}{e}$  mit  $S_{x_t}(\frac{3}{t} | 0)$  und  $S_{y_t}(0 | \frac{3t}{e}) \Rightarrow$  Dreiecksfläche  $A_t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{t} \cdot \frac{3t}{e} = \frac{9}{2e}$ .
- f)  $f_t'(x) = 1 - e^{t-x}$  und  $f_t''(x) = e^{t-x} \Rightarrow T(t|t+1)$  liegt auf der  $x$ -Achse für  $t = -1$ .
- g)  $f_t'(x) = te^{tx} + t(t+1) \cdot e^{(t+1)x}$  und  $f_t''(x) = t^2e^{tx} + t(t+1)^2e^{(t+1)x} = [t + (t+1)^2e^x]te^{tx} \Rightarrow$  Die Gleichung  $f_t''(x) = 0$  hat die Lösung  $x_t = \ln\left(-\frac{t}{(t+1)^2}\right)$  nur für  $t > 0$ .
- h) Alle Schaubilder gehen durch  $P(0|1)$ . Die Tangenten  $t_t(x) = tx + 1$  und die Normalen  $n_t(x) = -\frac{1}{t}x + 1$  durch  $P$  schneiden die  $x$ -Achse in  $S_{t_t}(-\frac{1}{t} | 0)$  und  $S_{n_t}(t|0)$ . Das Dreieck  $S_{t_t}PS_{n_t}$  hat den Flächeninhalt  $A(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (t + \frac{1}{t}) \cdot 1$  mit  $A'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$  und  $A''(t) = \frac{1}{t^3}$ .  $A(t)$  hat ein relatives Minimum ( $A'(t) = 0$  und  $A''(t) > 0$ ) für  $t = 1$ . Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow 0} A(t)$  handelt es sich auch um ein globales Minimum.

- i) Ansatz  $f_t(x(t)) = 1 \Leftrightarrow x + 2 + \ln(x+2) = x + t \Leftrightarrow x(t) = e^{t-2} - t$  mit  $x'(t) = e^{t-2} - 1$  und  $x''(t) = e^{t-2}$   
 $\Rightarrow$  Minimum von  $x$  bei  $t = 2$ , da  $x'(2) = 0$  und  $x''(t) > 0$

### Aufgabe 7: Extremwertaufgaben mit Exponentialfunktionen

- a)  $A(u) = b \cdot h = 2u \cdot f(u) = 2u \cdot e^{-u^2}$  mit  $u > 0$ ,  $A'(u) = 2(1 - 2u^2) \cdot e^{-u^2}$  und  $A''(u) = 4 \cdot (2u^3 - 3u) \cdot e^{-u^2} \Rightarrow$  rel  
 Max bei  $u = \frac{1}{2} \sqrt{2}$  mit  $A(\frac{1}{2} \sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}}$  und  $A(u) \rightarrow 0$  für  $u \rightarrow 0$  und  $u \rightarrow \infty \Rightarrow$  abs Max bei  $u = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ .
- b)  $A(u) = b \cdot h = u \cdot f(u) = u \cdot e^{-u}$  mit  $u > 0$ ,  $A'(u) = (1 - u) \cdot e^{-u}$  und  $A''(u) = (u - 2) \cdot e^{-u} \Rightarrow$  rel Max bei  $u = 1$  mit  
 $A(1) = e^{-1}$  und  $A(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 0 \Rightarrow$  abs Max bei  $u = 1$ .
- c)  $A(u) = b \cdot h = u \cdot f(u) = (2u - u^3) \cdot e^u$  mit  $0 \leq u \leq -1 + \sqrt{3}$ ,  $A'(u) = (2 + 2u - 3u^2 - u^3) \cdot e^u = (u - 1) \cdot (-u^2 - 4u - 2) \cdot e^u$   
 und  $A''(u) = (2 + 4u - 9u^2 - 4u^3) \cdot e^u \Rightarrow$  rel Max bei  $u_1 = 1$  ( $u_{2/3} = -2 \pm \sqrt{2} < 0$ ) mit  $A(1) = e$  und  $A(0) = 0$   
 und  $A(-1 + \sqrt{3}) \approx 2,23 < e \approx 2,71828 \Rightarrow$  abs Max bei  $u = 1$ .

### Aufgabe 8: Tangenten und Normalen an Exponentialfunktionen

- a) Tangente  $t_t(x) = tx + 1$  mit  $S_{tx}(-\frac{1}{t} | 0)$  und Normale  $n_t(x) = -\frac{1}{t}x + 1$  mit  $S_x(t | 0)$  bilden mit der  $x$ -Achse ein  
 Dreieck mit der Grundseite  $g(t) = t + \frac{1}{t}$  und der Höhe  $h = 1$ . Es hat den Flächeninhalt  $A(t) = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$   
 mit  $A'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$ . er ist minimal für  $t = 1$  (VZW der 1. Ableitung von  $-$  nach  $+$ ) mit  $A(1) = 1$  FE.
- b) Symmetrie zum Ursprung,  $f_t'(x) = -t(x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 3)}$ ,  $f_t''(x) = tx(x^2 - 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 3)} \Rightarrow H(1 | te)$ ,  $T(-1 | -te)$ ,  
 $W_{1/3}(\mp \sqrt{3} | \pm t\sqrt{3})$  und  $W_2(0 | 0)$  (einfache NST mit VZW bei  $f_t''$ !) Dreieck OPQ mit  $O(0 | 0)$ ,  $P(\frac{3}{2} \sqrt{3} | 0)$   
 und  $Q(\frac{6\sqrt{3}t^3}{1+4t^3} | \frac{3\sqrt{3}t}{1+4t^3}) \Rightarrow A(t) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{27}{4} \cdot \frac{t}{1+4t^3}$  mit  $A'(t) = \frac{27}{4} \cdot \frac{1-8t^3}{(1+4t^3)^2} \Rightarrow$  rel Max (NST von  
 $A'$  mit VZW von  $-$  nach  $+$ ) bei  $t = \frac{1}{2}$  mit  $A(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ ,  $A(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0 \Rightarrow$  abs Max bei  $t = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit rationale Funktionen

- a)  $U = 2a + 2b$  mit  $a \cdot b = 36 \Rightarrow U(a) = 2a + \frac{72}{a}$  mit  $U'(a) = 2 - \frac{72}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 6$ , wobei aber  $D_A = ]0; \infty[$ .  
 Da  $U(a) \rightarrow \infty$  für  $a \rightarrow 0$  und  $a \rightarrow \infty$  ist bei  $a = b = 6$  cm mit  $U = 24$  cm ein relatives und absolutes Minimum von  $U$ .
- b)  $U = 2r + s$  mit  $A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot r = 100 \Rightarrow U(r) = 2r + \frac{200}{r}$  mit  $U'(r) = 2 - \frac{200}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \pm 10$ , wobei aber  $D_A = ]0; \infty[$ .  
 Da  $U(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  ist bei  $r = 10$  cm und  $s = 20$  cm mit  $U = 40$  cm mit ein relatives und absolutes Minimum von  $U$ .
- c)  $A(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}$  ist genau dann minimal, wenn  $B(x) = x^2 + \frac{4}{x^4}$  minimal ist. Mit  $B'(x) = 2x - \frac{16}{x^5} = 0$   
 ergibt sich  $x = \pm \sqrt{2}$  mit  $D_A = ]0; \infty[$ . Da  $B(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow \infty$  ist bei  $x = \sqrt{2}$  mit  $B(\sqrt{2}) = 3$   
 $\text{cm}^2$  bzw.  $A(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$  cm ein relatives und absolutes Minimum von  $B$  und von  $A$ .
- d)  $A(x) = 2x \cdot f(x) = \frac{40x}{x^2 + 5}$  mit  $A'(x) = \frac{200 - 40x^2}{(x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$  mit  $D_A = ]0; \infty[$ . Da  $A(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow$   
 $0$  und  $x \rightarrow \infty$  ist bei  $x = \sqrt{5}$  cm mit  $A(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$   $\text{cm}^2$  ein relatives und absolutes Maximum von  $A$ .
- e)  $U = 2b + 2r + \pi r$  mit  $A = 2rb + \frac{\pi}{2}r^2 = 8 \Leftrightarrow b = \frac{4}{r} - \frac{\pi}{4}r \Rightarrow U(r) = \frac{\pi}{2}r + 2r + \frac{8}{r}$  mit  $U'(r) = \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{8}{r^2} =$   
 $0$  für  $r = \pm \frac{4}{\sqrt{4 + \pi}} \approx \pm 1,5$ . Wegen  $A = 2rb + \frac{\pi}{2}r^2 = 8$  gilt  $r \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ , also  $D_U = ]0; \frac{4}{\sqrt{\pi}}] \approx ]0; 2,26]$ . Da  $U(r)$

$\rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0^+$  und  $U(\frac{4}{\sqrt{\pi}}) = 4\sqrt{\pi} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \approx 11,6$  m ist bei  $r = \frac{4}{\sqrt{4+\pi}} \approx 1,5$  m mit  $U(\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}) = 4\sqrt{4+\pi} \approx 10,69$  m ein relatives und absolutes Minimum.

f)  $= 2\pi rh + 2\pi r^2$  mit  $V = \pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$  mit  $O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$

für  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$  cm, wobei  $D_O = ]0; \infty[$ . Da  $O(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  ist bei  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$  cm

und  $h = 10,86$  cm mit  $O(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}) \approx 553,58 \text{ cm}^2$  ein relatives und absolutes Minimum von  $O$ . Zum Vergleich:

Ein Würfel mit 1 Liter Fassungsvermögen hätte eine Kantenlänge von  $a = 10$  cm und eine Oberfläche von  $O_W = 6a^2 = 600 \text{ cm}^2$ !

g)  $= O_{\text{Halbkugel}} + O_{\text{Boden}} + O_{\text{Mantel}} = 2\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2\pi rh$  mit  $V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow h =$

$\frac{1000}{\pi r^2} - \frac{2r}{3} \Rightarrow O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2000}{r}$  mit  $O'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$  für  $r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}$  cm  $\approx 5,76$  cm, wobei

$D_O = ]0; \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}}[ = ]0; 10\sqrt[3]{\frac{1,5}{\pi}}[ \approx ]0 \text{ cm}; 7,81 \text{ cm}[$ . Da  $O(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0^+$  und  $O(10\sqrt[3]{\frac{1,5}{\pi}}) = 300$

$\sqrt[3]{2,25\pi} \text{ cm}^2 \approx 575,7 \text{ cm}^2$  ist bei  $r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}$  cm  $\approx 5,76$  cm und  $h \approx 26,3$  cm mit  $O(\sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}) = 519,2 \text{ cm}^2$  ein

relatives und absolutes Minimum von  $O$ .

h)  $= 2a^2 + 4ah$  mit  $V = a^2 h = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{a^2} \Rightarrow O(a) = 2a^2 + \frac{4000}{a}$  mit  $O'(a) = 4a - \frac{4000}{a^2} = 0$  für  $a =$

10 cm, wobei  $D_O = ]0; \infty[$ . Da  $O(a) \rightarrow \infty$  für  $a \rightarrow 0^+$  und  $a \rightarrow \infty$ , ist bei  $a = 10$  cm und  $h = 10$  cm mit  $O(10) = 600 \text{ cm}^2$  ein relatives und absolutes Minimum von  $O$ .