5.4. Prüfungsaufgaben zur Kurvenuntersuchung von Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung
Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend das Schaubild im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkt: $S_y(0|0)$ (0,5)
Ableitungen: $f'(x) = (x^2 + 2x)\cdot e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)\cdot e^x$ und $f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)\cdot e^x$ (2)
Asymptote $f(x) = 0$ für $x \to -\infty$ (1)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(0)$ </> 0): $T(0|0)$ und $H(-2|\frac{4}{e^2}) \approx H(-2|0{,}54)$ (2)
Wendepunkte ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$): $W_1(-2-\sqrt{2}\ |f(-2-\sqrt{2}\ ))\approx W_1(-3{,}41|0{,}38)$ (1)
$W_2(-2+\sqrt{2}\ |f(-2+\sqrt{2}\ )) \approx W_1(-0{,}58|0{,}19)$ (1)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung
Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = (2x - 3)\cdot e^{-2x^2}$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend das Schaubild im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-3)$ unf $S_x(\frac{3}{2}|0)$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = (-8x^2+12x+2)\cdot e^{-2x^2}$ und $f''(x) = (32x^3-48x^2-24x+12)\cdot e^{-2x^2}$ (2)
Asymptote $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-8x^2+12x+2}{e^{2x^2}} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{e^{2x^2}} = 0$ (1)
Extrempunkte ($f'(x) = 0$ und $f''(0) \neq 0$): $H(1{,}65|0{,}001)$ und $T(-0{,}15|-3{,}155)$ (2)
Wendepunkte ($f''(x) = 0$ und Schaubild): $W_1(-0{,}631|-1{,}922)$, $W_2(0{,}330|-1{,}882)$ und $W_3(1{,}800|0{,}001)$ (3)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung
Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = -ex + e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend das Schaubild im wesentlichen Bereich.

Lösung:
Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$ unf $S_x(1|0)$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = -e + e^x$, $f''(x) = e^x$ und $f'''(x) = e^x$ (2)
Asymptote $g(x) = -ex$ für $x \to -\infty$, denn $f(x) - g(x) = e^x \to 0$ für $x \to -\infty$. (1)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$): $T(-e|0) \approx T(2{,}72|0)$ (2)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung
Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = x\cdot e^{1-x}$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend das Schaubild im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkt: $S(0|0)$ (1)
waagrechte Asymptote $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = (1 - x)\cdot e^{1-x}$, $f''(x) = (x - 2)\cdot e^{1-x}$, $f'''(x) = (3 - x)\cdot e^{1-x}$ (2)
Hochpunkt: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$): $H(1|1)$ (2)
Wendepunkt: ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ oder VZW): $W(2|\frac{2}{e})$ (2)
Schaubild (1)

Aufgabe 5: Kurvenuntersuchung

Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x}$ auf Asymptoten und Extrempunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend das Schaubild im wesentlichen Bereich.

Lösung

senkrechte Asymptote bei x = 0 (NST nur im Nenner) (1)
waagrechte Asymptote $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)\cdot e^x}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$): $T(1|e)$ (2)
Schaubild (2)

Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung (10)

Untersuche die Funktion $f(x) = (x - 2)\cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne das Schaubild im Bereich $-3 \le x \le 3$ bzw. $-3 \le y \le 3$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|2)$ und $S_x(2|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = (x - 1)\cdot e^x$, $f''(x) = x\cdot e^x$ und $f'''(x) = (x + 1)\cdot e^x$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ negative x-Achse ist Asymptote (1)
Extrema: $T(1|-e)$ (2)
Wendpunkte: $(0|-2)$ (2)
Schaubild (1)

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung (10)

Untersuche die Funktion $f(x) = (x - 1)\cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne das Schaubild im Bereich $-5 \le x \le 1$ bzw. $-1 \le y \le 5$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-1)$ und $S_x(1|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = x\cdot e^x$, $f''(x) = (x + 1)\cdot e^x$ und $f'''(x) = (x + 2)\cdot e^x$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ negative x-Achse ist Asymptote (1)
Extrema: $T(0|-1)$ (2)
Wendpunkte: $(-1|-\frac{2}{e})$ (2)
Schaubild (1)

Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x + 2)\cdot e^{-x}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie ein Schaubild für $2{,}5 \le x \le 5$.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|2)$ und $S_x(-2|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = -(x + 1)\cdot e^{-x}$, $f'(x) = x\cdot e^{-x}$ und $f'''(x) = (-x + 1)\cdot e^{-x}$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ positive x-Achse ist Asymptote (1)
Extrema: $H(-1|e)$ (2)
Wendpunkte: $(0|2)$ (2)
Schaubild (1)