5.4. Prüfungsaufgaben zur Kurvenuntersuchung rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Waagrechte Asymptote mit Tangente (4)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{1+x^2} + 3$.

a) Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Asymptoten und Symmetrie.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

Lösung

a) f ist symmetrisch zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$. (1)
Es gibt keine senkrechte Asymptote, da der Nenner $1 + x^2 > 1$.
Es gibt eine waagrechte Asymptote y =3, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ (1)

b) $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ mit $f'(1) = -1$ (1)
Die Tangente durch $P(1 \mid 4)$ hat die Gleichung $y = -x + 5$. (1)

Aufgabe 2: Schiefe und senkrechte Asymptote, Symmetrie und Extrempunkte (9)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ auf Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (0,5)
Punktsymmetrie zum Ursprung, da $(f(-x) = -f(x))$ (1)
senkrechte Asymptote (NST nur im Nenner) bei x = 0 (1)
$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} \Rightarrow$ schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x$, da $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (1,5)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ und $f''(x) = \frac{4}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) </> 0$ bzw. Symmetrie) $T(2|2)$ und $H(-2|-2)$ (2)
Schaubild (1)

Aufgabe 3: Schiefe und senkrechte Asymptote, Symmetrie und Extrempunkte (9)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2+9}{3x}$ auf Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (0,5)
Punktsymmetrie zum Ursprung, da $(f(-x) = -f(x))$ (1)
senkrechte Asymptote (NST nur im Nenner) bei x = 0 (1)
$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3}{x} \Rightarrow$ schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x$, da $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (1,5)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-9}{3x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x^2}$ und $f''(x) = \frac{6}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) </> 0$ bzw. Symmetrie) $T(3|2)$ und $H(-3|-2)$ (2)
Schaubild (1)

Aufgabe 4: Schiefe und senkrechte Asymptoten, Extrempunkte und Tangente (20)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2-3}{3x-6}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ mit 1 LE = 1 cm. (14)
Welche Tangenten können durch $P(2|2)$ an das Schaubild von f gelegt werden? (6)

Lösung

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ (1)

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|\frac{1}{2})$ und (einfache NST nur im Zähler) $S_{x1/2}(\pm\sqrt{3}\,|0)$ (2)

senkrechte Asymptote mit VZW (einfache NST nur im Nenner) bei x = 2 (1)

$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3x-6}$ ⇒ schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3x-6} = 0$ (2)

Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{3(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{3(x-2)^2}$ und $f''(x) = \frac{2}{3(x-2)^3}$ (2)

Extrempunkte: (f'(x) = 0 und f''(x) </> 0 bzw. VZW von f') $H(1|\frac{2}{3})$ und $T(3|2)$ (4)

Schaubild mit Asymptoten (2)

Tangenten: $f'(x) = \frac{f(x)-2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{3(x-2)^2} = \frac{x^2-6x+9}{3(x-2)^2} \Leftrightarrow 2x = 6$

oder Argumentation mit Asymptoten im Schaubild (4)

⇒ nur die waagrechte Tangente y = 3 durch T(3|2) ist möglich! (2)

Aufgabe 5: Schiefe und senkrechte Asymptoten, Extrempunkte und Tangente (20)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \le x \le 5$ mit 1 LE = 1 cm. (14)
Welche Tangenten können durch P(−2|3) an das Schaubild von f gelegt werden? (6)

Lösung

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ (1)

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|\frac{3}{2})$ und (einfache NST nur im Zähler) $S_{x1/2}(\pm\sqrt{3}\,|0)$ (2)

senkrechte Asymptote mit VZW (einfache NST nur im Nenner) bei x = −2 (1)

$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+2}$ ⇒ schiefe Asymptote $g(x) = -x + 2$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+2} = 0$ (2)

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2} = -\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ und $f''(x) = -\frac{2}{(x+2)^3}$ (2)

Extrempunkte: (f'(x) = 0 und f''(x) </> 0 bzw. VZW von f') $H(-1|2)$ und $T(-3|6)$ (4)
Schaubild mit Asymptoten (2)

Tangenten: $f'(x) = \frac{f(x)-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-3x-3}{(x+2)^2} \Leftrightarrow x = 0$ (3)

⇒ $T(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ durch $S_y(0|\frac{3}{2})$ (3)

Aufgabe 6: Schiefe und senkrechte Asymptoten, Extrempunkte und hebbare Lücke (20)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^3+4x^2-3x-18}{3x^2-3x-6}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten, hebbare Lücken und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \le x \le 5$ mit 1 LE = 1 cm. (20)

Lösung

$f(x) = \frac{1}{3}\frac{(x-2)}{(x-2)}\frac{(x+3)^2}{(x+1)}$ mit stetiger Fortsetzung $\bar{f}(x) = \frac{(x+3)^2}{3(x+1)} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{4}{3(x+1)}$ (3)

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ (1)
Achsenschnittpunkte: $S_y(0|3)$ und Berührpunkt (doppelte NST nur im Zähler) $S_x(-3|0)$ (2)
senkrechte Asymptote mit VZW (einfache NST nur im Nenner) bei x = −1 (1)

Hebbare Lücke (NST im Zähler und im Nenner) $L(2|\frac{25}{9})$ (2)

Schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{3(x+1)} = 0$ (1)

Ableitungen: $\bar{f}'(x) = \frac{x^2+2x-3}{3(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}$ und $\bar{f}''(x) = \frac{8}{3(x+1)^3}$ (2)

Extrempunkte: (f‘(x) = 0 und f‘‘(x) </> 0 bzw. VZW von f’) $H(-3|0)$ und $T(1|\frac{8}{3})$ (4)

Schaubild mit Asymptoten und Loch (4)