# 5.4. Prüfungsaufgaben zur Kurvenuntersuchung rationaler Funktionen

**Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung mit Tangente (4)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{1+x^2} + 3$.

a) Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Asymptoten und Symmetrie.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

**Lösung**

a) f ist symmetrisch zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$. (1)
Es gibt keine senkrechte Asymptote, da der Nenner $1 + x^2 > 1$.
Es gibt eine waagrechte Asymptote y =3, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ (1)

b) $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ mit $f'(1) = -1$ (1)
Die Tangente durch $P(1 \mid 4)$ hat die Gleichung $y = -x + 5$. (1)

**Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung (9)**

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ auf Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \le x \le 5$ mit 1 LE = 1 cm.

**Lösung**

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (0,5)
Punktsymmetrie zum Ursprung, da $(f(-x) = -f(x))$ (1)
senkrechte Asymptote (NST nur im Nenner) bei x = 0 (1)
$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} \Rightarrow$ schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x$, da $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (1,5)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ und $f''(x) = \frac{4}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x)$ </> 0 bzw. Symmetrie) $T(2|2)$ und $H(-2|-2)$ (2)
Schaubild (1)

**Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung (9)**

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2+9}{3x}$ auf Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten und Extrempunkte. Zeichne ein Schaubild im Bereich $-5 \le x \le 5$ mit 1 LE = 1 cm.

**Lösung**

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (0,5)
Punktsymmetrie zum Ursprung, da $(f(-x) = -f(x))$ (1)
senkrechte Asymptote (NST nur im Nenner) bei x = 0 (1)
$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3}{x} \Rightarrow$ schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x$, da $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (1,5)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-9}{3x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x^2}$ und $f''(x) = \frac{6}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x)$ </> 0 bzw. Symmetrie) $T(3|2)$ und $H(-3|-2)$ (2)
Schaubild (1)