5.5. Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Näherungsverfahren
Berechnen Sie die folgenden Integrale
- mit Hilfe der Stammfunktion
- näherungsweise mit der Sehnentrapezmethode über zwei Intervalle
- näherungsweise mit der Kepler'schen Faßregel über zwei Intervalle.

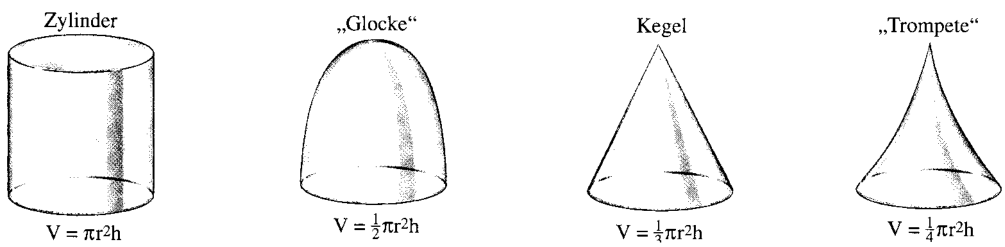
Zeichnen Sie die entsprechenden Flächen und Trapeze in ein Koordinatensystem. Geben Sie die Abweichungen vom exakten Wert in Prozent an

a) $\int_0^2 (\frac{1}{2}x+1)dx$ b) $\int_0^2 (\frac{1}{2}x^2+1)dx$ c) $\int_0^2 (\frac{1}{4}x^3+1)dx$ d) $\int_0^{\pi} \sin x dx$ e) $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$

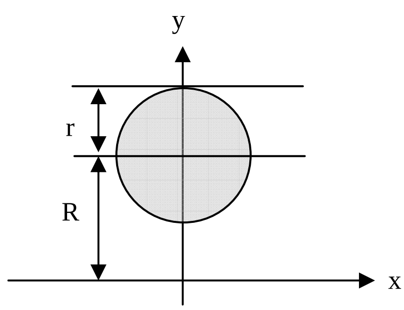
Aufgabe 2: Rotationsvolumina
Berechnen Sie die Volumina der Rotationskörper, die durch Rotation des Schaubildes von f(x) um die x- oder y-Achse im Bereich [a; b] entstehen und beschreiben Sie ihre Form durch je eine der folgenden Bezeichnungen: Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Glocke, Sektkelch ohne Stiel, Kugel, Trompete, Kühlturm (Hyperboloid).

a) $f(x) = 2$ in [0; 3] um die x-Achse
b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ in [0; 4] um die x-Achse
c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ in [2; 4] um die x-Achse
d) $f(x) = -x^2 + 4$ in [0; 2] um die x-Achse
e) $f(x) = x^2$ in [0; 2] um die x-Achse
f) $f(x) = e^x$ in [0; 2] um die x-Achse
g) $f(x) = e^{-x}$ in [0; ∞[um die x-Achse
h) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ in [0; ∞[um die x-Achse
i) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ in [−r; r] um die x-Achse
j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ in [−2; 1] um die x-Achse
k) $f(x) = \frac{1}{2}x$ in [0; 2] um die y-Achse
l) $f(x) = \frac{1}{2}x$ in [1; 2] um die y-Achse
m) $f(x) = x^2$ in [0; 4] um die y-Achse
n) $f(x) = e^x$ in [1; e^2] um die y-Achse

Aufgabe 3: Rotationsvolumina
In einem Mathematikbuch für die 10. Klasse der Realschule finden sich die folgenden Formeln für die „Familie der Rotationskörper". Wählen Sie die x-Achse als Rotationsachse, bestimmen Sie eine passende Begrenzungsfunktion und beweisen Sie die Formeln durch Integration.



Aufgabe 4: Rotationsvolumina
Ein Torus (Ring) mit dem Durchmesser 2(R + r) und der Dicke 2r entsteht durch Rotation eines Kreises mit dem Radius r im Abstand R um die x-Achse. Zeigen Sie, dass der Torus das Volumen $V = 2\pi^2 r^2 R$ besitzt.



Hinweise:
1. Die obere bzw. untere Begrenzungslinie des Kreises wird beschrieben durch $f_o(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ bzw. $f_u(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$.
2. Das Integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$ beschreibt die Flächeninhalt eines Halbkreises von Radius r und hat den Wert $\frac{1}{2}\pi r^2$.

Aufgabe 5: Rotationsvolumina beim Kühlturm

Wieviel Kubikmeter Beton werden (näherungsweise) für einen Kühlturm benötigt, dessen Außenhülle durch Rotation von $r(x) = \sqrt{0,02x^2 - 3,76x + 400}$ im Bereich $0\text{ m} \le x \le 100\text{ m}$ um die x-Achse entsteht und der eine Wandstärke von 1 m haben soll?

Aufgabe 6: Mittelwerte

Berechnen Sie die Mittelwerte der folgenden Funktionen im angegebenen Bereich:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ für $-10 \le x \le 10$ b) $f(x) = e^{-x^2}$ für $-10 \le x \le 10$ c) $f(x) = (\sin x)^2$ für $0 \le x \le 2\pi$

Aufgabe 7: Verkaufszahlen (H 2005)

Ein Supermarkt A führt eine neue Zahnpasta ein. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende wöchentliche Verkaufszahlen:

Verkaufswoche	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	26	46	60	76	86

In einem Modell beschreibt die Funktion f der Form $f(x) = \dfrac{ax+15}{bx+15}$ die verkaufte Stückzahl f(x) innerhalb der Woche x.

a) Bestimmen Sie a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche.
Zeichnen Sie das Schaubild K der Funktion f für das erste Jahr.
Wie entwickeln sich nach diesem Modell die wöchentlichen Verkaufszahlen während des ersten Jahres?
Nennen Sie mögliche Gründe für diese Entwicklung.

b) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft.
Nach wie vielen Wochen sind insgesamt mehr als 1500 Tuben verkauft?

c) Gleichzeitig mit dem Supermarkt A bringt der Supermarkt B ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x) = 214 - 214 - e^{-0,08x}$ beschreiben.
Zeichnen Sie das Schaubild C dieser Funktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.
Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen?
Wann hat der Supermarkt A den größten Vorsprung an insgesamt verkauften Tuben?
Beschreiben Sie, wie sich anhand der Schaubilder abschätzen lässt, bis zu welchem Zeitpunkt in beiden Supermärkten etwa gleich viele Tuben verkauft sind.

Aufgabe 8: Stückkostenfunktion

Die Stückkosten für das x-te Seitenleitwerk des A 310 bei Herstellung in Metallbauweise wurden auf $f(x) = \dfrac{2x+500}{x+50}$ k\$ geschätzt (k\$ = 1000 \$). Vom 300. Flugzeug an soll das Leitwerk aus GFK gefertigt werden, was zu einer Gewichtsersparnis von 150 kg bzw. 30 % führt. Die Stückkosten für das x-te Leitwerk nach Einführung der neuen Bauweise wurden auf $g(x) = \dfrac{1,5x-250}{x-280}$ k\$ geschätzt.

a) Untersuchen Sie f(x) und g(x) auf senkrechte und waagrechte Asymptoten. Skizzieren Sie die beiden Schaubilder in eine gemeinsames Koordinatensystem mit $0 \le x \le 800$.
b) Von welcher Stückzahl an würde der Übergang zur GFK-Bausweise zu günstigeren Stückkosten führen?
c) Von welcher Stückzahl an würden die neuen Leitwerke um 300 \$ billiger sein als die Metallleitwerke?
d) Von welcher Stückzahl an würden die Gesamtkosten durch Einführung der neuen Bauweise gesenkt?
e) Von welcher Stückzahl an nimmt die Stückkostenvorteil der GFK-Leitwerke wieder ab?

Aufgabe 9: Planschbecken

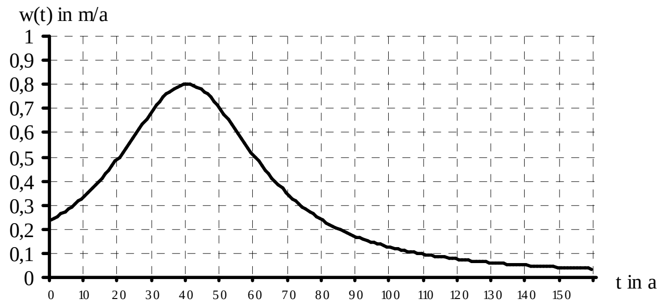
Im Planschbecken eines Freibades haben Kinder zwei Zuflußröhren A (15 l/min) und B (30 l/min) sowie eine Abflußröhre C (20 l/min) entdeckt. Sie lassen zunächst 10 Minuten lang A laufen, öffnen dann für wieder 10 Minuten zusätzlich B, schließen dann A, öffnen nach weiteren 10 Minuten C und schließen wieder 10 Minuten später auch B. Nach insgesamt einer Stunde kommt der Bademeister und schließt alle noch geöffneten Rohre.

a) Tragen Sie den Volumenstrom V’ in Liter pro Minute über die Zeit t in Minuten in ein Diagramm ein.
b) Tragen Sie as Volumen V in Litern über die Zeit t in Minuten in ein zweites Diagramm ein.
c) Wieviel Liter sind noch im Becken, als der Bademeister kommt?

Aufgabe 10: orale Einnahme von Medikamenten
Wasserlösliche Medikamente werden nach der Einnahme im Darm aufgenommen, anschließend in der Leber teilweise abgebaut und dann über den Blutkreislauf im ganzen Körper verteilt. in der Niere wird das Blut filtriert und die nicht mehr benötigte Stoffe über den Harn ausgeschieden. Die Konzentration K eines oral verabreichten Medikamentes im Blut lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t nach der Einnahme durch die Bateman-Funktion $K(t) = \frac{c \cdot a}{a - b}(e^{-bt} - e^{-at})$ mit K in mg/l und t in h beschreiben. Für ein spezielles Medikament ergaben sich die Werte a = 0,8; b = 0,2 und c = 18,75 mg/l.

a) Zeichnen Sie das Schaubild und deuten Sie seinen Verlauf.
b) Wann ist die Konzentration im Blut am höchsten? Wie hoch ist sie?
c) Wann ist die Konzentration unter die Nachweisgrenze von 0,1 mg/l gesunken?
d) Wie lange wirkt das Medikament, wenn dazu eine Mindestkonzentration von 7 mg/l im Blut benötigt wird?
e) Wie hoch ist die mittlere Konzentration in diesem Zeitraum?
f) Zu welchem Zeitpunkt ist die Aufnahmerate am höchsten? Wann die Ausscheidungsrate?

Aufgabe 11: Wachstum eines Fichtensetzlings
Das nebenstehende Schaubild zeigt das Wachstum w(t) eines Fichtensetzlings in m/a nach t Jahren. In den ersten 25 Jahren kann w(t) durch $w_1(t) = 0{,}24e^{0{,}04t}$ näherungsweise beschrieben werden. Eine Fichte gilt als ausgewachsen, wenn sie von einem bestimmten Zeitpunkt an in der Folgezeit nur noch maximal um 2 m wächst. Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Schaubildes, wann dies der Fall ist.



Aufgabe 12: Exponentielle Abnahme beim radioaktiven Zerfall
Beim radioaktiven Zerfall ist zu jedem Zeitpunkt t die Zerfallsgeschwindigkeit m'(t) proportional zur vorhandenen Masse m (t) des Elements. Wie lauten die zugehörige Differenzialgleichung und die Funktionsgleichung, wenn die Halbwertszeit des Elements 28 Jahre beträgt?

Aufgabe 13: Beschränktes Wachstum beim Newtonschen Temperaturausgleichsgesetz
Ein Körper mit der Temperatur T nimmt durch Energieaustausch mit der Umgebung nach einer Zeit die Umgebungstemperatur T_U an. Dabei ist die Änderungsrate T'(t) proportional zum Temperaturunterschied $T - T_U$ mit der Umgebung.

a) Welche Form hat die Differentialgleichung für den Temperaturausgleich?
b) Welche Form hat die Funktionsgleichung für den Temperaturausgleich?
c) Eine Tasse Milch kommt aus dem Kühlschrank mit 5 °C in das Wohnzimmer mit 20 °C. Nach 10 Minuten hat sie sich auf 10 °C erwärmt. Gib die Differentialgleichung und die Funktionsgleichung für den Temperaturausgleich an und skizziere seinen Verlauf.
d) Eine Tasse Kaffee kommt mit 70 °C in das Wohnzimmer mit 20 °C. Nach 15 Minuten hat sie sich auf 50 °C abgekühlt. Geben Sie die Differentialgleichung und die Funktionsgleichung für den Temperaturausgleich an und skizzieren Sie seinen Verlauf.

Aufgabe 14: Beschränktes Wachstum beim Lösen eines Salzes
Beim Lösen von Kochsalz (NaCI) in destilliertem Wasser beschreibt die Funktion m (in g) die zur Zeit t bereits gelöste Menge an Kochsalz. Die gelöste Salzmenge kann einen bestimmten Wert m_S, die Sättigungsgrenze, nicht überschreiten. Beobachtungen haben gezeigt, dass die Geschwindigkeit, mit der sich m(t) ändert, näherungsweise proportional zur Menge des noch lösbaren Salzes ist.

a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf, wenn die Sättigungsgrenze bei l00g destilliertem Wasser 36 g Kochsalz beträgt.
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm m(t), wenn für t = 0 noch kein Kochsalz in 100 g destilliertem Wasser gelöst war, nach 30 Minuten aber 28 g.

Aufgabe 15: Beschränktes Wachstum bei Tropfinfusion
Einem Patienten wird über eine Tropfinfusion ein Medikament verabreicht, das zuvor im Körper nicht vorhanden war. Pro Minute gelangt dabei eine Menge von 4 mg ins Blut. Andererseits beginnt die Niere das im Blut angereicherte Medikament wieder auszuscheiden; die momentane Ausscheidungsrate beträgt dabei 5 % pro Minute der jeweils im Blut aktuell vorhandenen Menge des Medikamentes m(t).

a) Welche Differenzialgleichung modelliert die zeitliche Entwicklung der Menge m(t)?
b) Geben Sie die Funktion an, die diese Differentialgleichung löst. Zeigen Sie, dass diese Tropfinfusion auf lange Sicht zu einer konstanten Menge des Medikamentes im Blut führt. Geben Sie diesen maximalen Wert an. Wann ist dieser zu 90 % erreicht?

5.5. Lösungen zu den Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Näherungsverfahren

Teil	$\int_a^b f(x)dx$	$[F(x)]_a^b$	f(a)	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	f(b)	Hauptsatz	Sehnentrapez	Kepler
a)	$\int_0^2 (\frac{1}{2}x+1)dx$	$\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^2$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	3 (0 %)	3 (0 %)
b)	$\int_0^2 (\frac{1}{2}x^2+1)dx$	$\left[\frac{1}{6}x^3+x\right]_0^2$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{2}$ (+5 %)	$\frac{10}{3}$ (0 %)
c)	$\int_0^2 (\frac{1}{4}x^3+1)dx$	$\left[\frac{1}{16}x^4+x\right]_0^2$	1	$\frac{5}{4}$	3	3	$\frac{13}{4}$ (+8,3 %)	3 (0 %)
e)	$\int_0^\pi \sin x dx$	$[-\cos x]_0^\pi$	0	1	0	2	$\frac{\pi}{2}$ (−21,5 %)	$\frac{2}{3}\pi$ (+4,7 %)
e)	$\int_1^3 \frac{1}{x}dx$	$[\ln x]_1^3$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	ln 3	$\frac{7}{6}$ (+6,2 %)	$\frac{10}{9}$ (+1,1 %)

Aufgabe 2: Rotatiosvolumina

a) $V = \pi\cdot\int_0^3 2^2 dx = 12\cdot\pi$ VE ≈ 37,7 VE (Zylinder)

b) $V = \pi\cdot\int_0^4 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{16}{3}\cdot\pi$ VE ≈ 16,8 VE (Kegel)

c) $V = \pi\cdot\int_2^4 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{14}{3}\cdot\pi$ VE ≈ 14,7 VE (Kegelstumpf)

d) $V = \pi\cdot\int_0^2 (-x^2+4)^2 dx = \int_0^2 (x^4-8x^2+16)dx = \frac{265}{15}\cdot\pi$ VE ≈ 55,5 VE (Sektkelch ohne Stiel)

e) $V = \pi\cdot\int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}\cdot\pi$ VE ≈ 20,1 VE (Trompete)

f) $V = \pi\cdot\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}(e^4-1)$ VE ≈ 84,2 VE (Trompete)

g) $V = \pi\cdot\int_0^\infty e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}$ VE ≈ 1,57 VE (Turnierlanze ohne Griff)

h) $V = \pi\cdot\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx = \pi$ VE ≈ 3,14 VE (Turnierlanze ohne Griff)

i) $V = \pi\cdot\int_{-r}^r (r^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\cdot\pi r^3$ VE ≈ 33,5 VE (Kugel)

j) $V = \pi\cdot\int_{-2}^1 (x^2+2)dx = 9\pi$ VE ≈ 28,3 VE (Hyperboloid)

k) $V = \pi\cdot\int_0^2 (2y)^2 dy = \frac{32}{3}\cdot\pi$ VE ≈ 33,5 VE (Kegel)

l) $V = \pi\cdot\int_1^2 (2y)^2 dy = \frac{28}{3}\cdot\pi$ VE ≈ 29,3 VE (Kegel)

m) $V = \pi\cdot\int_0^4 y\,dy = 8\cdot\pi$ VE ≈ 25,1 VE (Glocke)

n) $V = \pi\cdot\int_1^{e^2} (\ln y)^2 dy = \pi\cdot[(y\cdot\ln y - y)\cdot\ln y]_1^{e^2} - \pi\cdot\int_1^{e^2} (y\cdot\ln y - y)\cdot\frac{1}{y}dy = \pi\cdot\left[y\cdot((\ln y)^2 - 2\ln y + 2)\right]_1^{e^2}$

$= 2\cdot\pi\,(e^2-1)$VE ≈ 40,1 VE (Sektkelch ohne Stiel)

Aufgabe 3: Rotationsvolumina

Zylinder: $f(x) = r \Rightarrow V = \int_0^h \pi \cdot r^2 dx$ = ⇨$\cdot r^2 \cdot h$.

Glocke: $f(x) = r\cdot \sqrt{\frac{x}{h}} \Rightarrow V = \int_0^h \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x}{h} dx = \frac{1}{2}$ ⇨$\cdot r^2 \cdot h$.

Kegel: $f(x) = r\cdot \frac{x}{h} \Rightarrow V = \int_0^h \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x^2}{h^2} dx = \frac{1}{3}$ ⇨$\cdot r^2 \cdot h$.

Trompete: $f(x) = r\cdot \left(\frac{x}{h}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow V = \int_0^h \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x^3}{h^3} dx = \frac{1}{4}$ ⇨$\cdot r^2 \cdot h$.

Aufgabe 4: Rotationsvolumina

$V_{Ring} = V_{Vollscheibe} - V_{Kern} = \pi\cdot \int_{-r}^{r} (f_o(x))^2 dy - \pi\cdot \int_{-r}^{r} (f_u(x))^2 dy = \pi\cdot \int_{-r}^{r} \left[(f_o(x))^2 - (f_u(x))^2\right] dy =$
$\pi\cdot \int_{-r}^{r} \left[(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\right] dy = \pi \int_{-r}^{r} 4 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 r^2 R.$

Aufgabe 5: Rotationsvolumina

$V = V_{außen} - V_{innen} = = \pi\cdot \int_0^{100} (r(x))^2 dx - \pi\cdot \int_0^{100} (r(x) - 1)^2 dx = \pi\cdot \int_0^{100} \left[(r(x))^2 - (r(x) - 1)^2\right] dx =$
$\pi\cdot \int_0^{100} [2r(x) - 1] dx = 10129{,}4 \text{ m}^3$ Beton

Aufgabe 6: Mittelwerte

a) $\bar{f} = \frac{1}{20} \int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2 + 1} dx \approx 0{,}147$ b) $\bar{f} = \frac{1}{20} \int_{-10}^{10} e^{-x^2} dx \approx 0{,}088$ c) $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx = 0{,}5$

Aufgabe 7: Verkaufszahlen, (H 2005)

a) $f(1) = 26 \Leftrightarrow \frac{a + 15}{b + 15} = 26 \Leftrightarrow a + 15 = 26b + 390$ $f(5) = 86 \Leftrightarrow \frac{5a + 15}{5b + 15} = 86 \Leftrightarrow a + 3 = 86b + 258$.
Subtraktion ergibt $12 = 60b + 132 \Leftrightarrow b = 2$. Einsetzen ergibt $a = 427$. Für $x \to \infty$ strebt f(x) gegen den ganzrationalen Hauptteil $y = \frac{427}{2} = 213{,}5$. Da die wöchentliche Nachfrage nach Zahnpasta durch das Einzugsgebiet und die Zahnputzgewohnheiten der Kunden beschränkt ist, können auch die Verkaufszahlen nicht unbeschränkt ansteigen. Es tritt eine Marktsättigung ein.

b) Gesamtabsatz in den ersten 52 Wochen: $\int_0^{52} f(x)dx \approx 7801{,}2$ Tuben (GTR). Gesamtabsatz nach 16 Wochen $\int_0^{16} f(x)dx \approx 1595{,}8$ Tuben, nach 15 Wochen 1451,6 Tuben. Die Schwelle von 1500 Tuben wird also in der 16. Woche überschritten.

c) Für $x \to \infty$ strebt g(x) gegen die Schranke y = 214. Die Differenz der bis zur Woche x insgesamt verkauften Tuben ist $D(x) = \int_0^x (f(t) - g(t))dt$. Sie hat ein relatives Maximum bei x = 11,87 mit $\int_0^{11{,}87} (f(t) - g(t))dt = 121{,}9$. Der größte Vorsprung wird also in der 12. Woche mit ca. 122 Tuben erreicht. (GTR) Die beiden Flächen, die durch die beiden Schaubilder und die Senkrechte bei $x = x_0$ begrenzt werden, müssen gleich groß sein, d.h. $D(x_0) = 0$. Dies ist bei $x_0 = 23$ der Fall. (GTR)

Aufgabe 8: Stückkostenfunktion

a) $f(x) = \frac{2x+500}{x+50} = 2 + \frac{400}{x+50}$ und $g(x) = \frac{1,5x-250}{x-280} = 1,5 + \frac{170}{x-280}$

Stückkosten bei Beibehaltung der alten Technologie: $S_{alt}(x) = 2 + \frac{400}{x+50}$

Stückkosten bei Einführung der neuen Technologie: $S_{neu}(x) = \begin{cases} S_{alt}(x) \text{ für } 0 \le x \le 299 \\ 1,5 + \frac{170}{x-280} \text{ für } 300 \le x \end{cases}$

b) $S_{alt}(x) - S_{neu}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 402,9 \Rightarrow$ Vom 403. Leitwerk an führt die neue Technologie zu geringeren Stückkosten.

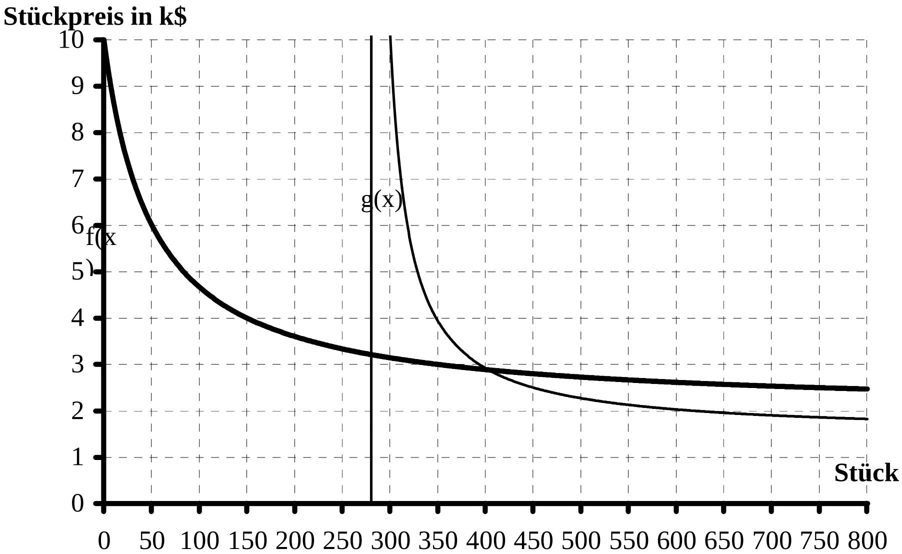
c) $S_{alt}(x) - S_{neu}(x) = 0,3 \Leftrightarrow x = 450 \Rightarrow$ Vom 450. Exemplar an sind die neuen Leitwerke um 300 $ billiger als die alten.

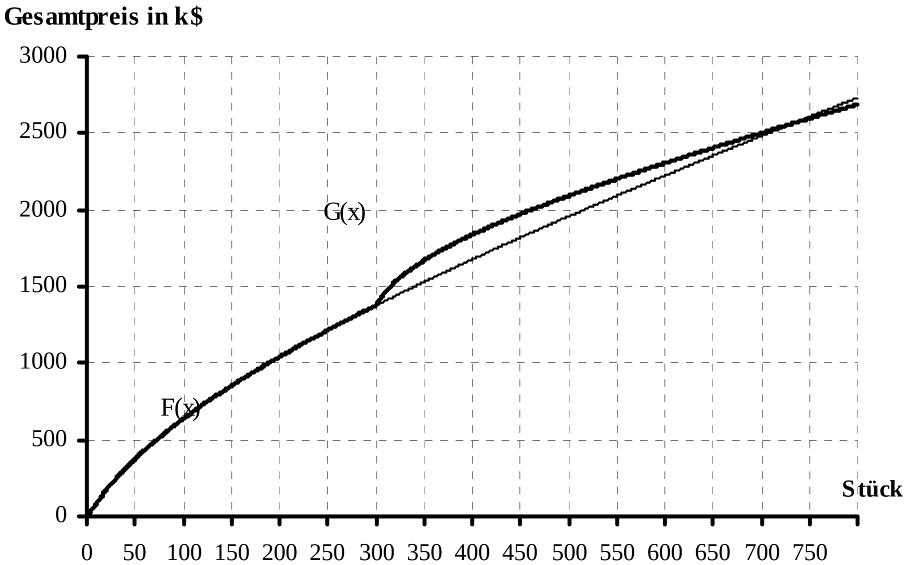
d) Gesamtkosten mit alter Technologie: $G_{alt}(x) = \int_0^x f(t)dt = -1564,8 + 2x + 400 \ln(x + 50)$

Gesamtkosten mit neuer Technologie: $G_{neu}(x) = \begin{cases} G_{alt}(x) \text{ für } 0 \le x \le 299 \\ G_{alt}(299) + \int_{299}^{x} g(t)dt \approx 426,2 + 1,5x + 170 \cdot \ln(x - 280) \text{ für } 300 \le x \end{cases}$

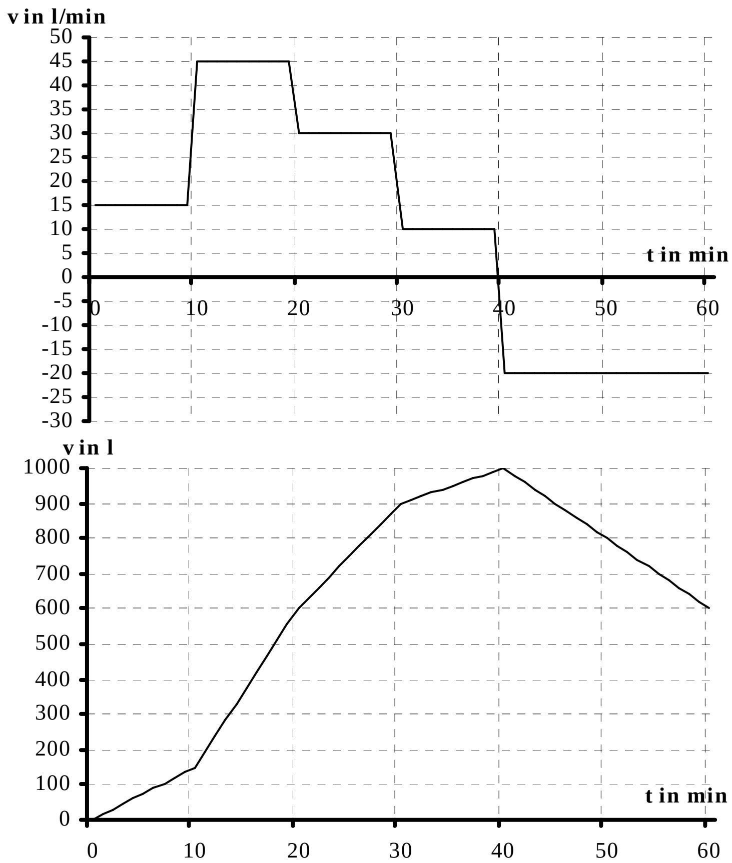
$G_{alt}(x) - G_{neu}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 731,3 \Rightarrow$ Vom 732. Leitwerk an führt die neue Technologie zu geringeren Gesamtkosten.

e) $S'_{alt}(x) - S'_{neu}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 898,0 \Rightarrow$ Vom 898. Leitwerk an nimmt der Stückkostenvorteil wieder ab. (GTR)





Aufgabe 9: Planschbecken



Aufgabe 10: orale Einnahme von Medikamenten

a) Skizze: Zunächst verzögertes Ansteigen der Konzentration durch Aufnahme im Darm und teilweisen Abbau in der Leber, dann Abfall der Konzentration durch Ausscheidung über die Niere.

b) maximale Konzentration von ca. 11,81 mg/l nach ca. 2,31 h ≈ 2 h 19 min (GTR)

c) $K(t) \leq 0{,}1$ mg/l nach 27,6 h ≈ 27h und 36 min (GTR)

d) $K(t) \geq 7$ mg/l für $0{,}638 \leq t \leq 6{,}246$, also für 5,608 h ≈ 5 h und 36 min

e) Die mittlere Konzentration ist $\overline{K} = \frac{1}{5{,}60}\int_{0{,}638}^{6{,}248} K(t)dt \approx 9{,}92$ mg/l

f) maximale Aufnahmenrate zu Beginn bei t =0 und maximale Ausscheidungsrate im Wendepunkt bei $t \approx 4{,}62$ h ≈ 4 h und 37 min

Aufgabe 11: Wachstum eines Fichtensetzlings

Gesucht ist die untere Grenze t_0, für die $\int_{t_0}^{\infty} w(t)dt \leq 2$ ist. Man bestimmt zunächst die entsprechende Stelle t_1 auf der linken Seite: $\int_{t_1}^{\infty} w_1(t)dt \leq 2 \Leftrightarrow \left[6e^{0{,}04t}\right]_{-\infty}^{t_1} \leq 2 \Leftrightarrow e^{0{,}04t} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow t_1 \leq 25\cdot\ln(\frac{1}{3}) \approx -27{,}465$. Wegen der Achsensymmetrie des Schaubildes zu t = 40 gilt $40 - t_1 = t_0 - 40 \Leftrightarrow t_0 = 80 + t_1 = 107{,}465$. Die Fichte ist also nach 107,5 Jahren ausgewachsen.

Aufgabe 12: Exponentielle Abnahme beim radioaktiven Zerfall

$m'(t) = k\cdot m(t)$ und $m(t) = m(0)\cdot e^{kt}$ mit $m(28) = 0{,}5\cdot m(0) \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{28} \approx -0{,}0247$

Aufgabe 13: Beschränktes Wachstum beim Newtonschen Temperaturausgleichsgesetz

a) $T'(t) = k\cdot[T(t) - T_U]$

b) $T(t) = T_U - (T_U - T(0))e^{-kt}$

c) $T(t) = 20 - 15e^{-kt}$ mit $T(10) = 10 \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\cdot\ln(\frac{2}{3}) \approx 0{,}0405 \Rightarrow T'(t) = 0{,}0405[T(t) - 20]$

d) $T(t) = 20 + 50e^{-kt}$ mit $T(15) = 50 \Rightarrow k = -\frac{1}{15}\cdot\ln(\frac{3}{5}) \approx 0{,}0340 \Rightarrow T'(t) = 0{,}0340[T(t) - 20]$

Aufgabe 14: Beschränktes Wachstum beim Lösen eines Salzes

a) $m'(t) = k\cdot[m(t) - 36]$

b) $m(t) = 36 - 36e^{-kt}$ mit $m(30) = 28 \Rightarrow k = -\frac{1}{30}\cdot\ln(\frac{1}{4}) \approx 0{,}0462$

Aufgabe 15: Beschränktes Wachstum bei Tropfinfusion

a) $m'(t) = 4 - 0{,}05m(t) = 0{,}05[80 - m(t)] \Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze S = 80 mg

b) $m(t) = 80 - 80e^{-0{,}05t} \Rightarrow m(t) = 0{,}9\cdot 80 = 72$ für $t = -20\cdot\ln(\frac{1}{10}) \approx 46{,}05$, also nach 46 Minuten