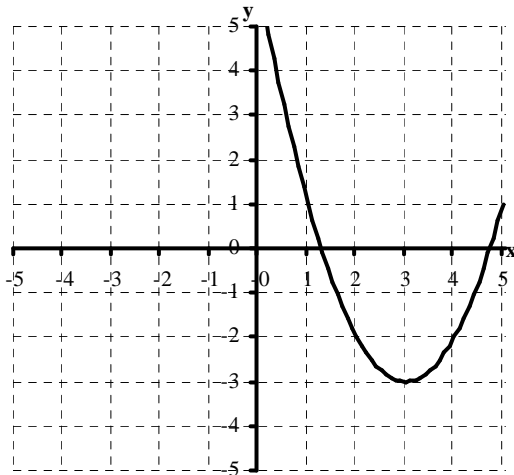
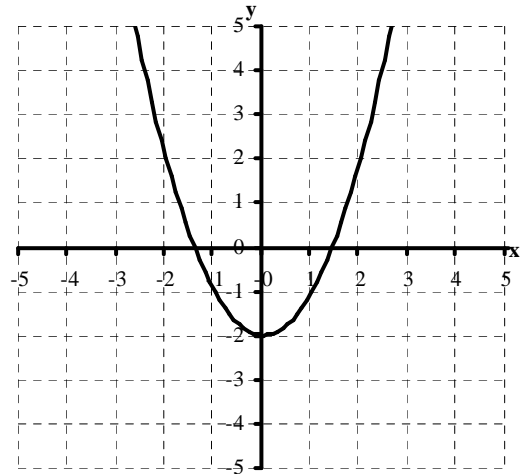


5.5. Aufgaben zur graphischen Integration

Aufgabe 1

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und einer Stammfunktion F in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

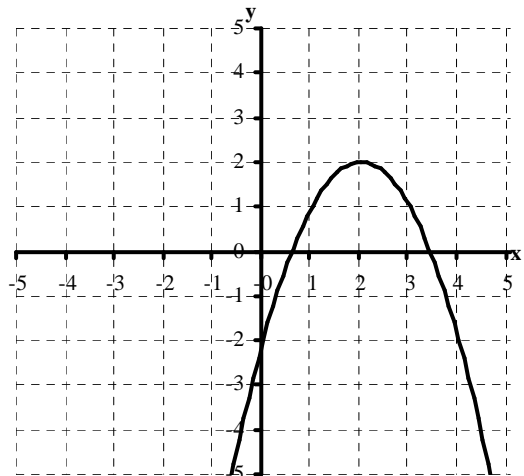
- f' besitzt im Intervall $[-2; 2]$ genau eine Nullstelle.
- f' ist im Intervall $[-2; 2]$ monoton fallend.
- F besitzt im Intervall $[-2; 2]$ genau drei Nullstellen.
- F ist im Intervall $[-2; 2]$ monoton fallend.
- F besitzt im Intervall $[-2; 2]$ Extremstellen.



Aufgabe 2

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

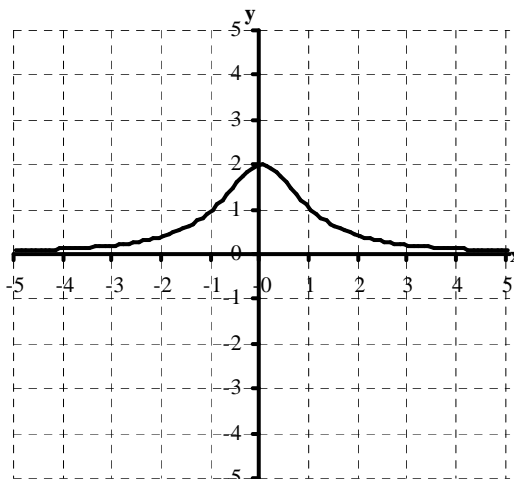
- f' besitzt im Intervall $[0; 5]$ genau eine Nullstelle.
- I_0 ist im Intervall $[2; 4]$ monoton fallend.
- I_0 besitzt im Intervall $[0; 5]$ genau drei Nullstellen.
- I_0 besitzt im Intervall $[0; 5]$ genau 2 Extremstellen.



Aufgabe 3

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- I_0 besitzt im Intervall $[0; 5]$ genau drei Nullstellen.
- I_0 ist im Intervall $[2; 4]$ monoton steigend.
- I_0 besitzt im Intervall $[0; 5]$ genau zwei Extremstellen.
- f' ist im Intervall $[0; 5]$ monoton fallend.



Aufgabe 4

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- I_0 besitzt im Intervall $[-5; 5]$ genau zwei Nullstellen.
- I_0 besitzt im Intervall $[-5; 5]$ zwei Extremstellen.
- I_0 ist symmetrisch zum Ursprung.
- f' ist im Intervall $[-5; 5]$ monoton fallend.
- f' ist symmetrisch zur y-Achse.

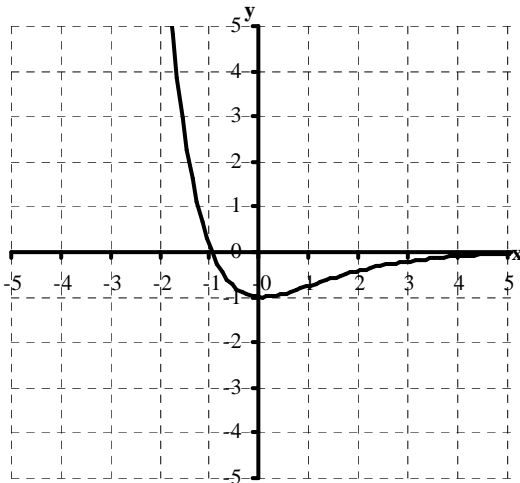
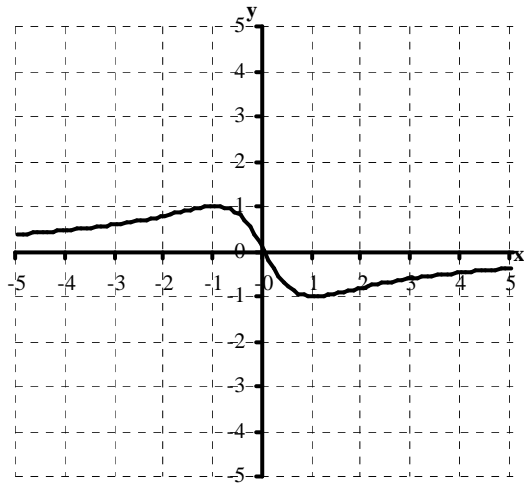
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.

Aufgabe 5

Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f . Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f und in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- Das Schaubild von f ist achsensymmetrisch.
- Das Schaubild von f hat zwei Nullstellen.
- Das Schaubild von f hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt.
- Das Schaubild von f hat zwei Extrempunkte.

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.



Aufgabe 6

Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f . Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f und in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- $f(x) > 0$ für $x > -1$.
- Das Schaubild von f hat bei $x = -1$ eine waagrechte Tangente.
- Das Schaubild von f hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt.
- Das Schaubild von f hat keine Wendepunkte.

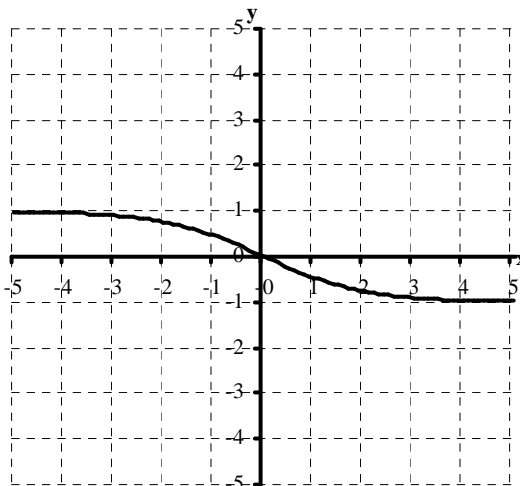
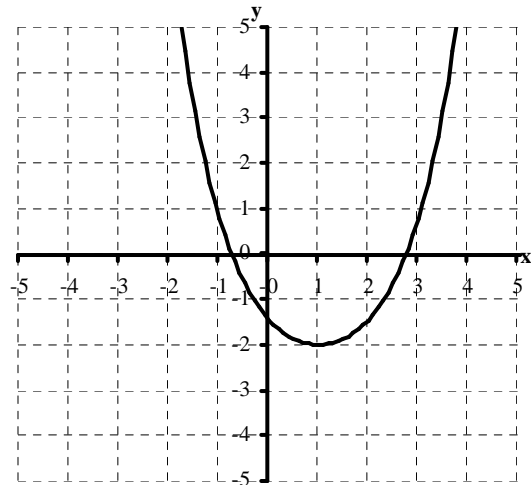
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.

Aufgabe 7

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- f' besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau eine Nullstelle.
- f' besitzt im Intervall $[-2; 4]$ einen Wendepunkt.
- I_0 ist im Intervall $[0; 2]$ monoton fallend
- I_0 besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau drei Nullstellen.
- I_0 besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau 2 Extremstellen.

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an. Es handelt sich **nicht** um eine ganzrationale Funktion!



Aufgabe 8

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegebene Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

- f' ist achsensymmetrisch.
- f' besitzt im Intervall $[-5; 5]$ einen Wendepunkt.
- I_0 ist im Intervall $[-5; 5]$ monoton steigend
- I_0 ist punktsymmetrisch

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an. Es handelt sich **nicht** um eine ganzrationale Funktion!

5.5. Lösungen zu den Aufgaben zur graphischen Integration

Allgemeine Hinweise: Diese Aufgaben dienen als Vorbereitung auf den Pflichtteil der schriftlichen Abiturprüfung und die mündliche Abiturprüfung am allgemein bildenden Gymnasium in Baden-Württemberg. In diesen Prüfungen stehen keinerlei Hilfsmittel zur Verfügung. Das Verständnis und die (verbale und zeichnerische) Darstellung mathematischer Inhalte wird in diesen Prüfungen im Verhältnis zur exakten Rechentechnik stärker gewichtet als früher. Bei den Aufgaben zur graphischen Integration und Differentiation soll der Verlauf der Steigungsfunktion und der Flächeninhaltsfunktion aus dem **Schaubild** von f hergeleitet werden. Die exakte Berechnung der Ableitung und der Integralfunktion aus der **Funktionsgleichung** wird **nicht verlangt** und ist mitschulischen Mitteln auch nicht immer möglich! Dementsprechend habe ich die Lösungen **ohne** Blick auf die Funktionsgleichung formuliert: Nicht das exakte Ergebnis zählt, sondern die Begründung! Zur Überprüfung habe ich jeweils die Gleichung der Ausgangsfunktion angegeben. Mit dem TI 83 lassen sich daraus die Schaubilder der Ableitung und der Flächeninhaltsfunktion mittels der Befehle MATH 8:nDeriv und MATH 9:fnInt zeichnen: Eingabe z.B. für Aufgabe 1: $Y_1 = X^2 - 2$, $Y_2 = nDeriv(Y_1, X, X)$ und $Y_3 = fnInt(Y_1, X, 0, X)$.

Aufgabe 1

$$f(x) = x^2 - 2$$

- stimmt, weil f nur bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente hat
- stimmt nicht, im Gegenteil nimmt die Steigung ständig zu, f' ist auf $[-2; 2]$ monoton steigend!
- stimmt nicht: Da die Lage von F im Koordinatensystem nicht festgelegt ist, kann man auch keine genaue Aussage über die Nullstellen machen.
- stimmt nicht: Da Flächen unterhalb der x -Achse negativ gezählt werden, nimmt F genau dann ab, wenn $f(x) < 0$, d.h. in diesem Falle nur zwischen den beiden Nullstellen, die aber deutlich innerhalb des Intervalls liegen.
- stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW von f haben Extremstellen von F zur Folge.

Aufgabe 2

$$f(x) = (x - 3)^2 - 3$$

- stimmt, weil f nur bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat
- stimmt, da Flächen unterhalb der x -Achse negativ gezählt werden.
- stimmt nicht. Eine Nullstelle ist bei $x = 0$, da trivialerweise $I_0(0) = 0$ ist. Dann steigt I_0 bis zur Nullstelle von f bei $x \approx 1,2$ auf den Maximalwert ca. 3,5 (Kästchen oberhalb der x -Achse abzählen!) und fällt im Bereich negativer Flächen wieder. Zwischen $x = 3$ und $x = 4$ wird wieder der Wert 0 erreicht (3,5 Kästchen unterhalb der x -Achse abzählen!) Danach sinkt I_0 weiter ab auf den Minimalwert von ca. -2,5 (Kästchen abschätzen!) bei der zweiten Nullstelle von f bei $x \approx 4,8$. Bis $x = 5$ liegt nur noch ca. 0,1 Kästchen oberhalb der x -Achse, so dass der Wert 0 auf keinen Fall bis dorthin erreicht werden kann.
- stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW bei $x \approx 1,2$ und $x \approx 4,8$ von f haben Extremstellen von F zur Folge.

Aufgabe 3

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 2$$

- stimmt: Zunächst ist $I_0(0) = 0$. I_0 sinkt dann bis zur Nullstelle von f bei $x \approx 0,6$ auf den Minimalwert ca. -0,5 (Kästchen unterhalb der x -Achse), steigt dann und passiert die x -Achse bei $x \approx 1,2$ (0,5 Kästchen oberhalb der x -Achse abschätzen). Der Maximalwert von ca. 3,5 (Kästchen oberhalb der x -Achse) wird bei der nächsten Nullstelle von f bei $x \approx 3,4$ erreicht. Bis $x = 5$ fällt I_0 um deutlich mehr als 4 Flächeneinheiten (Kästchen unterhalb der x -Achse), d.h., es passiert die x -Achse ein drittes Mal!
- stimmt nicht, denn I_0 steigt nur dort, wo $f(x) > 0$, d.h. zwischen den Nullstellen bei $x \approx 0,6$ und $x \approx 3,4$.
- stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW bei $x \approx 0,6$ und $x \approx 3,4$ von f haben Extremstellen von I_0 zur Folge.
- stimmt: die Steigung nimmt im gesamtem Bereich ständig ab.

Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

- stimmt nicht: Da $f(x) > 0$ im gesamtem Bereich, ist I_0 monoton steigend und passiert die x -Achse nur einmal bei $x = 0$.
- stimmt nicht, denn f hat auf dem gesamtem Intervall keinen VZW
- stimmt: $I_0(-x) = -I_0(x)$, denn die Flächen $|I_0(x)|$ rechts und links $|I_0(-x)|$ von der y -Achse sind gleich und außerdem ist $I_0(0) = 0$.
- stimmt nicht: die Steigung nimmt bis zum Wendepunkt bei $x \approx -1$ zu, dann bis zum nächsten Wendepunkt bei $x \approx 1$ wieder ab und dann wieder zu.
- stimmt nicht wegen d). f' ist aber symmetrisch zum Ursprung!

Aufgabe 5

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$$

- stimmt, denn die Änderungsraten f' im gleichen Abstand rechts und links von der y-Achse unterscheiden sich nur im Vorzeichen: $f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow$ Abnahme links = Zunahme rechts
- keine Aussage möglich, denn die Lage der Stammfunktion f im Koordinatensystem ist nicht festgelegt
- stimmt nicht, denn die Steigung f' hat bei $x = 0$ VZW von + (steigend) nach - (fallend), d.h., es liegt ein Hochpunkt vor.
- stimmt nicht: Abgesehen von dem Hochpunkt bei $x = 0$ gibt keine weitere Stelle mit waagrechter Tangente.

Aufgabe 6

$$f'(x) = -(x + 1) \cdot e^{-x}$$

- keine Aussage möglich, denn die Lage der Stammfunktion f im Koordinatensystem ist nicht festgelegt
- stimmt, denn die Steigung $f'(-1) = 0$
- stimmt nicht, denn die Steigung f' hat bei $x = 0$ ein Minimum, d.h., f hat dort maximales Gefälle, d.h., es liegt ein Wendepunkt vor.
- stimmt nicht: siehe c)

Aufgabe 7

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}) - 3. \text{ Das Schaubild entsteht durch Verschiebung der „Exponentialparabel“ } y = e^x + e^{-x}$$

um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = -3$ nach unten sowie Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$.

- stimmt, denn nur bei $x = 1$ liegt eine waagrechte Tangente vor.
- stimmt, denn die Krümmung f'' erreicht in $[-2; 4]$ offensichtlich ihr Maximum (entweder ein Maximum genau bei $x = 1$ oder vielleicht auch zwei Maxima links und rechts von $x = 1$). Ein Maximum von f'' bedeutet aber maximale Zunahme von f' , d.h. einen Wendepunkt von f' .
- stimmt, da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden
- stimmt nicht, denn von $I_0(0) = 0$ aus nimmt I_0 zunächst ab bis auf den Minimalwert von ca. 4,5 FE bei $x \approx 2,8$ und nimmt bis $x = 4$ um ca. 3 FE zu, d.h., die x-Achse wird erst jenseits von $x = 4$ wieder erreicht.
- stimmt, denn die Steigung $I_0'(x) = f(x)$ hat zwei Nullstellen bei $x \approx -0,8$ und $x \approx 2,8$.

Aufgabe 8

$$f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

- stimmt, denn die Steigungen sind rechts und links im gleichen Abstand von der y-Achse gleich: $f'(-x) = f'(x)$.
- stimmt, denn die Krümmung f'' erreicht bei $x \approx \pm 0,5$ ihr Maximum bzw. Minimum. Ein Maximum bzw. Minimum von f'' bedeutet aber maximale Zu- bzw. Abnahme von f' , d.h. einen Wendepunkt von f' .
- stimmt nicht, da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden, d.h. I_0 ist für $x < 0$ monoton steigend aber für $x > 0$ monoton fallend
- stimmt nicht, I_0 ist aber achsensymmetrisch, denn die Flächen sind rechts und links im gleichen Abstand von der y-Achse gleich: $I_0(-x) = I_0(x)$