

5.5. Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen

Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen für die folgenden Funktionen:

- | | | | |
|------------------------------|--------------------|---|---|
| a) $f(x) = 0$ | f) $f(x) = x^2$ | k) $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | p) $f(x) = 16x^4 + x - 7 + \frac{5}{x^2} - \frac{30}{x^3}$ |
| b) $f(x) = 1$ | g) $f(x) = x^3$ | l) $f(x) = 5x^2 - 3x + 6$ | q) $f(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{t}}$ |
| c) $f(x) = 2$ | h) $f(x) = x^{-3}$ | m) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ | r) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ |
| d) $f(x) = a \in \mathbb{R}$ | i) $f(x) = x^{-2}$ | n) $f(u) = 4u^3 - 3u^2 + 7u$ | s) $f(t) = \sin t$ |
| e) $f(x) = x$ | j) $f(x) = x^{-1}$ | o) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \sqrt{x} - 5$ | t) $f(t) = \cos t$ |

Aufgabe 2: Hauptsatz und Eigenschaften des Integrals

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- | | |
|--|---|
| a) $\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx$ | d) $\int_1^2 x^2 dx$, $\int_2^3 x^2 dx$ und $\int_1^3 x^2 dx$ (Intervalladditivität) |
| b) $\int_{-1}^2 (x^3 + x^2) dx$ | e) $\int_2^1 x^2 dx$ (Vertauschung der Grenzen bzw. $dx < 0$) |
| c) $\int_{-3}^{-2} (x^2 + 3x + 2) dx$ | f) $\int_0^3 (x^2 - 4x + 3) dx$ (Flächen unterhalb der x-Achse bzw. $f(x) < 0$) |

Aufgabe 3: Flächen unterhalb der x-Achse

Berechnen Sie den Gesamthalt F aller Flächen, die von den Senkrechten $x = a$ bzw. $x = b$ sowie von der x-Achse und dem Schaubild von f begrenzt werden:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2 - 1$ mit $a = -1$ und $b = 2$ | d) $f(x) = x^3 - x$ mit $a = -1$ und $b = 1$ |
| b) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ mit $a = -4$ und $b = -1$ | e) $f(x) = x^3 - x$ mit $a = -1$ und $b = 2$ |
| c) $f(x) = x^3$ mit $a = -1$ und $b = 2$ | f) $f(t) = \sin t$ mit $a = -\pi$ und $b = \pi$ |

Aufgabe 4: Flächen unterhalb der x-Achse

Berechnen Sie den Gesamthalt der Flächen, die durch das Schaubild von f und die x-Achse eingeschlossen werden.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = -x^2 + 1$ | b) $f(x) = x^3 - 4x$ | c) $f(x) = -x^4 + x^2$ | d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ |
|----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------------|

Aufgabe 5: Flächen zwischen zwei Schaubildern

Berechnen Sie den Gesamthalt A aller Flächen, die durch die Schaubilder der Funktionen f und g sowie die Senkrechten $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen werden.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = -x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 + 3$, $a = -1$ und $b = 1$ | d) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $a = 0$ und $b = 2$ |
| b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2$, $a = -1$ und $b = 1$ | e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $a = -2$ und $b = -1$ |
| c) $f(x) = 3x$, $g(x) = -x + 2$, $a = 0$ und $b = 1$ | f) $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ |

Aufgabe 6: Flächen zwischen zwei Schaubildern

Berechnen Sie den Gesamthalt A der Flächen, die durch die Schaubilder der Funktionen f und g eingeschlossen werden.

- | | | | |
|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x^2$ | b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ | c) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ | d) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = 2x^2$ |
|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|

Aufgabe 7: Variable Grenzen

Geben Sie an, für welches t die Fläche $A(t)$ genau 2 FE groß wird.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $A(t) = \int_0^t \left(-x^2 + \frac{7}{3}\right) dx$ | c) $A(t) = \int_1^t \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$ | e) $A(t) = \int_1^2 (x^2 + t) dx$ |
| b) $A(t) = \int_0^t \left(x^2 + \frac{4}{3}x + 1\right) dx$ | d) $A(t) = \int_2^t \left(x^2 - \frac{4}{3}x - 1\right) dx$ | f) $A(t) = \int_0^t \left(x^2 - \frac{2}{3}tx + 2\right) dx$ |

Aufgabe 8: Substitutionsmethode

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode:

- | | | | |
|---------------------------------------|---|---|---|
| a) $\int_0^3 (2x \cdot e^{x^2-2}) dx$ | f) $\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2} dx$ | k) $\int_0^1 \left(x - \frac{2tx}{x^2+t} \right) dx$ | p) $\int_0^1 x \cdot \ln(x^2+1) dx$ |
| b) $\int_1^2 (4x \cdot e^{x^2-4}) dx$ | g) $\int_0^1 \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2} dx$ | l) $\int_2^3 \frac{11x-4}{x-1} dx$ | q) $\int_2^3 \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ |
| c) $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ | h) $\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4-2x^2+1} dx$ | m) $\int_0^1 \frac{x^2+t}{x+t} dx$ | r) $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ |
| d) $\int_0^5 e^{-x} dx$ | i) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ | n) $\int_{-1}^1 \frac{t^2-1}{t^2} x dx$ | s) $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$ |
| e) $\int_{-3}^0 e^{1-x} dx$ | j) $\int_2^4 \frac{x}{x^2-1} dx$ | o) $\int_1^2 \ln x dx$ | t) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ |

Aufgabe 9: Produktregel

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Produktregel:

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\int_0^2 (x \cdot e^x) dx$ | c) $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x}) dx$ | e) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^{-x}) dx$ | g) $\int_1^3 (\ln x)^2 dx$ |
| b) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^x) dx$ | d) $\int_1^2 (x \cdot e^{-x}) dx$ | f) $\int_e^{e^2} x \cdot \ln x dx$ | h) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ |

Aufgabe 10: Substitutions- und Produktregel mit beliebigen Grenzen

Zeigen Sie durch Integration von $f(x)$ über ein beliebiges Intervall $[a; b]$, daß $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 4e^{2x}$ mit $F(x) = 2e^{2x}$ | j) $f(x) = (x+3)e^{-x}$ mit $F(x) = -(x+4)e^{-x}$ |
| b) $f(x) = e^{-0.5x-1}$ mit $F(x) = -2e^{-0.5x-1}$ | k) $f(x) = (-3x+11)e^{3x}$ mit $F(x) = (-x+4)e^{3x}$ |
| c) $f(x) = -6e^{-3x+1}$ mit $F(x) = 2e^{-3x+1}$ | l) $f(x) = -(6x+1)e^{-3x+1}$ mit $F(x) = (2x+1)e^{-3x+1}$ |
| d) $f(x) = 2x \cdot e^{0.5x^2}$ mit $F(x) = 2e^{0.5x^2}$ | m) $f(x) = (2x-5)e^{2x+1}$ mit $F(x) = (x-3)e^{2x+1}$ |
| e) $f(x) = -6x \cdot e^{x^2+1}$ mit $F(x) = -3e^{x^2+1}$ | n) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ mit $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ |
| f) $f(x) = (4x-2)e^{-x^2+x-1}$ mit $F(x) = -2e^{-x^2+x-1}$ | o) $f(x) = \frac{1}{(2x+4)^2}$ mit $F(x) = -\frac{1}{4x+8}$ |
| g) $f(x) = (x+3)e^x$ mit $F(x) = (x+2)e^x$ | p) $f(x) = 1 + \ln x$ mit $F(x) = x \cdot \ln x$ |
| h) $f(x) = (-2x-1)e^x$ mit $F(x) = (-2x+1)e^x$ | q) $f(x) = (\ln x)^2$ mit $F(x) = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2$ |
| i) $f(x) = x^2 e^x$ mit $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ | r) $f(x) = 1 - (\ln(1-x))^2$ mit $F(x) = (1-x) \cdot (1 - \ln(1-x))^2$ |

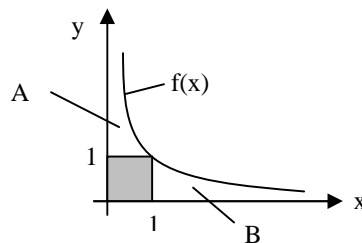
Aufgabe 11: Uneigentliche Integrale

Schreiben Sie die folgenden uneigentlichen Integrale als Grenzwert und berechnen sie ihn:

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ | c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.5}} dx$ | e) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ | g) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$ |
| b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ | d) $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.5}} dx$ | f) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ | h) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$ |

Aufgabe 12: Uneigentliche Integrale

Geben Sie alle $n > 0$ an, für die die Flächen A bzw. B zwischen der Hyperbel $f(x) = x^{-n}$ und der y-Achse bzw. x-Achse endlich sind und berechnen Sie ihren Inhalt in Abhängigkeit von n.



5.5. Lösungen zu den Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen ($c \in \mathbb{R}$)

- | | |
|---|--|
| <p>a) $F_c(x) = c$</p> <p>b) $F_c(x) = x + c$</p> <p>c) $F_c(x) = 2x + c$</p> <p>d) $F_c(x) = ax + c$</p> <p>e) $F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$</p> <p>f) $F_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$</p> <p>g) $F_c(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$</p> <p>h) $F_c(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$</p> <p>i) $F_c(x) = -x^{-1} + c$</p> <p>j) $F_c(x) = \ln x + c$</p> | <p>k) $F_c(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$</p> <p>l) $F_c(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$</p> <p>m) $F_c(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$</p> <p>n) $F_c(u) = u^4 - u^3 + \frac{7}{2}u + c$</p> <p>o) $F_c(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{1.5} - 5x + c$</p> <p>p) $F_c(x) = \frac{16}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 7x + c - \frac{5}{x} + \frac{15}{x^2}$</p> <p>q) $F_c(t) = \frac{3}{4}t^2 - \sqrt{t} + c$</p> <p>r) $F_c(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \dots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + c$</p> <p>s) $F_c(t) = -\cos t + c$</p> <p>t) $F_c(t) = \sin t + c$</p> |
|---|--|

Aufgabe 2: Hauptsatz und Eigenschaften des Integrals

- a) $\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{6}[x^3 + 3x^2 - 9x]_{-1}^1 = -\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{8}{3}$ FE
- b) $\int_{-1}^2 (x^3 + x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 = \left(4 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 6\frac{3}{4}$ FE
- c) $\int_{-3}^{-2} (x^2 + 3x + 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{6}[2x^3 + 9x^2 + 12x]_{-3}^{-2} = \frac{5}{6}$ FE
- d) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ FE, $\int_2^3 x^2 dx = \frac{19}{3}$ FE, $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$ FE,
- e) $\int_2^1 x^2 dx = -\frac{7}{3}$ FE
- f) $A = \left|\int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx\right| + \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx\right| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}$ FE

Aufgabe 3: Flächen unterhalb der x-Achse

- a) $A = \left|\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 1) dx\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ FE
- b) $A = \left|\int_{-4}^{-3} (-x^2 - 4x - 3) dx\right| + \left|\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}$ FE
- c) $A = \left|\int_{-1}^0 x^3 dx\right| + \left|\int_0^2 x^3 dx\right| = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ FE
- d) $A = \left|\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx\right| + \left|\int_0^1 (x^3 - x) dx\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ FE

$$e) A = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x) dx \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{3} \text{ FE}$$

$$f) A = 2 \left| \int_0^{\pi} (\sin t) dt \right| = 4 \text{ FE}$$

Aufgabe 4: Flächen unterhalb der x-Achse

$$a) A = 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ FE}$$

$$b) A = 2 \cdot \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 2 \cdot |-4| = 8 \text{ FE}$$

$$c) A = 2 \cdot \int_0^1 (-x^4 + x^2) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^2 \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \text{ FE}$$

$$d) A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| = \frac{1}{4} + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \text{ FE}$$

Aufgabe 5: Flächen zwischen zwei Schaubildern

$$a) A = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \text{ FE}$$

$$b) A = \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 2) dx \right| = 3 \frac{1}{3} \text{ FE}$$

$$c) A = \left| \int_0^{0,5} (4x - 2) dx \right| + \left| \int_{0,5}^1 (4x - 2) dx \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ FE}$$

$$d) A = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - x) dx \right| = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 \text{ FE}$$

$$e) A = \left| \int_{-2}^{-1} (x^3 - x^2) dx \right| = 6 \frac{1}{12} \text{ FE}$$

$$f) A = \left| \int_{-0,75\pi}^{0,25\pi} (\cos t - \sin t) dt \right| = 2\sqrt{2} \text{ FE}$$

Aufgabe 6: Flächen zwischen zwei Schaubildern

$$a) A = \left| \int_{-1}^1 (2x^2 - 2) dx \right| = \frac{8}{3}$$

$$b) A = \left| \int_0^1 (x^3 - x^2) dx \right| = \frac{1}{12}$$

$$c) A = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$d) A = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx \right| = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}$$

Aufgabe 7: Variable Grenzen

$$a) A(t) = \int_0^t (-x^2 + \frac{7}{3}) dx = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{3}t = 2 \Leftrightarrow t^3 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

b) $A(t) = \int_0^t (x^2 + \frac{4}{3}x + 1)dx = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + t = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 3t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2$

c) $A(t) = \int_1^t (x^2 - \frac{1}{3})dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow t^3 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2$

d) $A(t) = \int_2^t (x^2 - \frac{4}{3}x - 1)dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^2 - t - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + 2 = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t = 3$

e) $A(t) = \int_1^2 (x^2 + t)dx = \frac{1}{3}2^3 + \frac{t}{2}2^2 - \frac{1}{3}1^3 - \frac{t}{2}1^2 = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}t = 2 \Leftrightarrow 14 + 9t = 12 \Rightarrow t = -\frac{2}{9}$

f) $A(t) = \int_0^t (x^2 - \frac{2}{3}tx + 2)dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{t}{3}t^2 + 2t = 2 \Leftrightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$

Aufgabe 8: Substitutionsmethode

a) $\int_0^3 (2x \cdot e^{x^2-2})dx = \int_{-2}^7 e^z dz = e^7 - e^{-2} \approx 1096,50$ mit $z(x) = x^2 - 2$

b) $\int_1^2 (4x \cdot e^{x^2-4})dx = 2 \int_1^2 2x \cdot e^{x^2-4} dx = 2 \int_{-3}^0 e^z dz = 2(1 - e^{-3}) \approx 1,90$ mit $z(x) = x^2 - 4$

c) $\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3 \cdot e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 e^z dz = \frac{1}{3}(e^4 - e) \approx 17,29$ mit $z(x) = 3x + 1$

d) $\int_0^5 e^{-x} dx = -\int_0^5 (-1) \cdot e^{-x} dx = -\int_0^{-5} e^z dz = -(e^{-5} - 1) \approx 0,99$ mit $z(x) = -x$

e) $\int_{-3}^0 e^{1-x} dx = -\int_{-3}^0 (-1) \cdot e^{1-x} dx = -\int_4^1 e^z dz = -(e - e^4) \approx 51,88$ mit $z(x) = 1 - x$

f) $\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_1^{10} \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{10} = 0,9$ mit $z(x) = x + 1$

g) $\int_0^1 \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2} dx = \left[-\frac{2}{x^2-5x+6}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$

h) $\int_0^{0,5} \frac{2x}{x^4-2x^2+1} dx = \int_0^{0,5} \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2-1}\right]_0^{0,5} = \frac{1}{3}$

i) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$

j) $\int_2^4 \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-1)\right]_2^4 = \frac{1}{2} \ln 5$

k) $\int_0^1 \left(x - \frac{2tx}{x^2+t}\right) dx = \int_0^1 x dx - \int_t^{1+t} \frac{t}{z} dz = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - [t \ln z]_t^{1+t} = \frac{1}{2} - t(\ln(1+t) - \ln t)$ mit $z(x) = x^2 + t$

l) $\int_2^3 \frac{11x-4}{x-1} dx = \int_1^2 \frac{11z+7}{z} dz = \int_1^2 \left(11 + \frac{7}{z}\right) dz = [11z + 7 \ln(z)]_1^2 = 11 + 7 \ln(2) \approx 15,85$ mit $z(x) = x - 1$

m) $\int_0^1 \frac{x^2+t}{x+t} dx = \int_t^{1+t} \frac{z^2-2tz+t^2+t}{z} dz = \int_t^{1+t} \left(z - 2t + \frac{t^2+t}{z}\right) dz = \left[\frac{1}{2}z^2 - 2tz + (t^2+t) \ln(z)\right]_t^{1+t} = \frac{1}{2} - t + (t^2+t) \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$

n) $\int_{-1}^1 \frac{t^2-1}{t^2} x dx = \frac{t^2-1}{t^2} \int_{-1}^1 x dx = \frac{t^2-1}{t^2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = 0$

o) $\int_1^2 \ln(x) dx = [x \cdot \ln(x) - x]_1^2 = (2 \cdot \ln(2) - 2) - (0 - 1) \approx 0,39$ mit Stammfunktion aus Formelsammlung

- p) $\int_0^1 x \cdot \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot \ln(x^2 + 1) dx = \int_1^2 \ln(z) dz = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0,19$ mit $z(x) = x^2 + 1$
- q) $\int_2^3 \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} z^2 dz = \frac{1}{3} (\ln(3))^3 - \frac{1}{3} (\ln(2))^3 \approx 0,33$ mit $z(x) = \ln(x)$
- r) $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2} \sqrt{z} dz = \left[\frac{2}{3} z^{1,5} \right]_0^{\ln 2} = \frac{2}{3} (\ln(2))^{1,5} \approx 0,38$ mit $z(x) = \ln(x)$
- s) $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\ln e}^{\ln 2e} z dz = \frac{1}{2} (\ln(2e))^2 - \frac{1}{2} \approx 0,93$ mit $z(x) = \ln(x)$
- t) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} z \cdot dz = \frac{1}{2} (\ln(2))^2 \approx 0,24$ mit $z(x) = \ln(x+1)$

Aufgabe 9: Produktregel

- a) $\int_0^2 (x \cdot e^x) dx = \left[x \cdot e^x \right]_0^2 - \int_0^2 (1 \cdot e^x) dx = \left[x \cdot e^x \right]_0^2 - \left[e^x \right]_0^2 = \left[(x-1) \cdot e^x \right]_0^2 = e^2 + 1 \approx 8,39$
- b) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^x) dx = \left[x^2 \cdot e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x \cdot e^x) dx = \left[x^2 \cdot e^x \right]_0^1 - 2 \left[(x-1) \cdot e^x \right]_0^1 = \left[(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x \right]_0^1 = e - 2 \approx 0,72$
(Ergebnis aus a) einsetzen!)
- c) $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x}) dx = \left[x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right) dx = \left[x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-1}^1 = \left[\left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) \cdot e^x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{3}{4} e^{-2} \approx 1,90$
- d) $\int_1^2 (x \cdot e^{-x}) dx = \left[x \cdot (-e^{-x}) \right]_1^2 - \int_1^2 (1 \cdot (-e^{-x})) dx = \left[-x \cdot e^{-x} \right]_1^2 - \left[e^{-x} \right]_1^2 = \left[(-x-1) \cdot e^{-x} \right]_1^2 = -3e^{-2} + 2e^{-1} \approx 0,33$
- e) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^{-x}) dx = \left[x^2 \cdot (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (2x \cdot (-e^{-x})) dx = \left[-x^2 \cdot e^{-x} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 (x \cdot e^{-x}) dx = \left[-x^2 \cdot e^{-x} \right]_0^1 + 2 \left[(-x-1) \cdot e^{-x} \right]_0^1 = \left[(-x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x} \right]_0^1 = -5 \cdot e^{-1} + 2 \approx 0,16$ (Ergebnis aus d) einsetzen!)
- f) $\int_e^{e^2} x \cdot \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right]_e^{e^2} - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_e^{e^2} = \left[\frac{1}{4} x^2 (2 \ln(x) - 1) \right]_e^{e^2} = \frac{1}{4} e^2 (3e^2 - 1) \approx 39,10$
- g) $\int_1^3 (\ln(x))^2 dx = \left[(x \ln(x) - x) \cdot \ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (x \cdot \ln(x) - x) \cdot \frac{1}{x} dx = \left[x(\ln(x))^2 - x \ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (\ln(x) - 1) dx = \left[x(\ln(x))^2 - x \ln(x) \right]_1^3 - \left[(x \ln(x) - x) \right]_1^3 = \left[x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x \right]_1^3 = 3 \cdot (\ln(3))^2 - 6 \cdot \ln(3) + 6 - 2 \approx 1,03$
- h) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \left[l(x) \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x) \cdot \ln(x) \right]_1^2 = \frac{(\ln(2))^2}{2} \approx 0,24.$

Aufgabe 10: Substitutions- und Produktregel mit beliebigen Grenzen

- a) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 2 \cdot 2e^{2x} dx = \int_{2a}^{2b} 2e^z dz = \left[2e^z \right]_{2a}^{2b} = \left[2 \cdot e^{2x} \right]_a^b = [F(x)]_a^b$
- b) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{1}{-0,5} \right) \cdot (-0,5) e^{-0,5x-1} dx = \int_{-0,5a-1}^{-0,5b-1} -2e^z dz = \left[-2e^z \right]_{-0,5a-1}^{-0,5b-1} = \left[-2e^{-0,5x-1} \right]_a^b = [F(x)]_a^b$
- c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-6) \cdot e^{-3x+1} dx = \int_a^b 2 \cdot (-3) e^{-3x+1} dx = \int_{-3a+1}^{-3b+1} 2e^z dz = \left[2e^z \right]_{-3a+1}^{-3b+1} = \left[2 \cdot e^{-3x+1} \right]_a^b = [F(x)]_a^b$
- d) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 2 \cdot x e^{0,5x^2} dx = \int_{0,5a^2}^{0,5b^2} 2e^z dz = \left[2 \cdot e^z \right]_{0,5a^2}^{0,5b^2} = \left[2 \cdot e^{0,5x^2} \right]_a^b = [F(x)]_a^b$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (-3) \cdot 2x e^{x^2+1} dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} -3e^z dz = \left[-3e^z\right]_{a^2+1}^{b^2+1} = \left[-3 \cdot e^{x^2+1}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{f)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (-2) \cdot (-2x+1) e^{-x^2+x-1} dx = \int_{-a^2+a-1}^{-b^2+b-1} -2e^z dz = \left[-2e^z\right]_{-a^2+a-1}^{-b^2+b-1} = \left[-2 \cdot e^{-x^2+x-1}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{g)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (3x^2-2x-2) e^{x^3-x^2-2x+1} dx = \int_{a^3-a^2-2a+1}^{b^3-b^2-2b+1} e^z dz = \left[e^z\right]_{a^3-a^2-2a+1}^{b^3-b^2-2b+1} = \left[e^{x^3-x^2-2x+1}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{h)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(x+3) \cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = \left[(x+3) \cdot e^x\right]_a^b - \left[e^x\right]_a^b = \left[(x+3)e^x - e^x\right]_a^b = \left[(x+2) \cdot e^x\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{i)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(-2x-1) \cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b (-2) \cdot e^x dx = \left[(-2x-1) \cdot e^x\right]_a^b - \left[(-2)e^x\right]_a^b = \left[(-2x-1)e^x - (-2)e^x\right]_a^b = \\
&\quad \left[(-2x+1) \cdot e^x\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{j)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2x \cdot e^x dx = \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \left[2xe^x\right]_a^b + \int_a^b 2e^x dx = \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \left[2xe^x\right]_a^b + \left[2e^x\right]_a^b = \\
&\quad \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_a^b = \left[(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{k)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(x+3) \cdot (-e^{-x})\right]_a^b - \int_a^b 1 \cdot (-e^{-x}) dx = \left[(-x-3) \cdot e^{-x}\right]_a^b - \left[e^{-x}\right]_a^b = \left[(-x-3)e^{-x} - e^{-x}\right]_a^b = \\
&\quad \left[(-x-4)e^{-x}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{l)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(-3x+11) \cdot \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)\right]_a^b - \int_a^b (-3) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx = \left[(-x+\frac{11}{3}) \cdot e^{3x}\right]_a^b - \left[-\frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^b = \\
&\quad \left[(-x+\frac{11}{3})e^{3x} + \frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^b = \left[(-x+4)e^{3x}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{m)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(-6x-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x+1}\right)\right]_a^b - \int_a^b (-6) \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x+1}\right) dx = \left[(2x+\frac{1}{3}) \cdot e^{-3x+1}\right]_a^b - \left[-\frac{2}{3}e^{-3x+1}\right]_a^b = \\
&\quad \left[(2x+\frac{1}{3})e^{-3x+1} + \frac{2}{3}e^{-3x+1}\right]_a^b = \left[(2x+1)e^{-3x+1}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{n)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \left[(2x-5) \cdot \frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b - \int_a^b 2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x+1} dx = \left[(x-\frac{5}{2}) \cdot e^{2x+1}\right]_a^b - \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b = \left[(x-\frac{5}{2})e^{2x+1} - \frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b = \\
&\quad \left[(x-3)e^{2x+1}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{o)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} dz = \left[\frac{1}{2} \ln(z)\right]_{a^2+1}^{b^2+1} = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{p)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(2x+4)^2} dx = \int_{(2a+4)^2}^{(2b+4)^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{2z}\right]_{(2a+4)^2}^{(2b+4)^2} = \left[-\frac{1}{2(2x+4)}\right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
\text{q)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (1+\ln(x)) dx = \left[x+x \cdot \ln(x) - x\right]_a^b = [F(x)]_a^b \quad (\text{mit Stammfunktion des } \ln \text{ aus Formelsammlung}) \\
\text{r)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \ln(x) \cdot \ln(x) dx = \left[(x \ln(x) - x) \ln(x)\right]_a^b - \int_a^b (x \ln(x) - x) \cdot \frac{1}{x} dx = \left[x(\ln(x))^2 - x \ln(x)\right]_a^b - \int_a^b (\ln(x) - 1) dx \\
&= \left[x(\ln(x))^2 - x \ln(x)\right]_a^b - \left[x \ln(x) - x - x\right]_a^b = \left[x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x\right]_a^b = [F(x)]_a^b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s) } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(1 - (\ln(1-x))^2 \right) dx = [x]_a^b - \int_a^b (\ln(1-x))^2 dx \\
&= [x]_a^b + \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + 2(1-x) \right]_a^b = \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + (1-x) + 1 \right]_a^b \\
&= \left[(1-x)((\ln(1-x))^2 - 2\ln(1-x) + 1) + 1 \right]_a^b = \left[(1-x)(\ln(1-x) - 1)^2 + 1 \right]_a^b = \left[(1-x)(1 - \ln(1-x))^2 \right]_a^b = [F(x)]_a^b \\
&\text{(Die 1 fällt bei der Differenzbildung weg!)} \\
\text{NR: } - \int_a^b (\ln(1-x))^2 dx &= \int_{1-a}^{1-b} \ln z \cdot \ln z dz = \left[(z \ln z - z) \ln z \right]_{1-a}^{1-b} - \int_{1-a}^{1-b} (z \ln z - z) \cdot \frac{1}{z} dz \\
&= \left[z(\ln z)^2 - z \ln z \right]_{1-a}^{1-b} - \int_{1-a}^{1-b} (\ln z - 1) dz = \left[z(\ln z)^2 - z \ln z \right]_{1-a}^{1-b} - \left[z \ln z - z - z \right]_{1-a}^{1-b} = \left[z(\ln z)^2 - 2z \ln z + 2z \right]_{1-a}^{1-b} \\
&= \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + 2(1-x) \right]_a^b \text{ mit } z(x) = 1-x
\end{aligned}$$

Aufgabe 11: Uneigentliche Integrale

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 & \text{c) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,5}} dx = 2 & \text{e) } \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2 & \text{g) } \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \\
\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = 1 & \text{d) } \int_0^1 \frac{1}{x^{0,5}} dx = 2 & \text{f) } \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 & \text{h) } \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{e}
\end{array}$$

Aufgabe 12: Uneigentliche Integrale

Für $n < 1$ ist $A = \int_0^1 \frac{1}{x^n} dx = \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_0^1 = \frac{1}{1-n}$ und

für $n > 1$ ist $A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_0^b = \frac{1}{n-1}$.