

## 5.5. Abstrakte Abituraufgaben zu Exponentialfunktionen

### Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (x - 2) \cdot e^{0,5x}$ .

- Untersuchen Sie das Schaubild von  $f$  auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie ein Schaubild für  $-5 \leq x \leq 3$ . (14)
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch das Schaubild von  $f$  und die beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird. (6)
- Die Senkrechte  $x = u$  mit  $u < 0$  schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $P$  und das Schaubild von  $f$  im Punkt  $Q$ . Für welches  $u$  wird der Flächeninhalt des Dreiecks  $OPQ$  maximal? (6)

#### Lösung

##### Teil a)

Achsenschnittpunkte:  $S_y(0|-2)$  und  $S_x(2|0)$  (2)

Ableitungen:  $f'(x) = \frac{1}{2}x \cdot e^{0,5x}$ ,  $f'(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) \cdot e^{0,5x}$  und  $f''(x) = (\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}) \cdot e^{0,5x}$  (2)

Asymptoten:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$  negative  $x$ -Achse ist Asymptote (1)

Extrema:  $T(0|-2)$  (2)

Wendpunkte:  $(-2|-\frac{4}{e})$  (2)

Schaubild (1)

##### Teil b)

$$A = \left| \int_0^2 (x-2) \cdot e^{0,5x} dx \right| = \left| \left[ (x-2) \cdot 2 \cdot e^{0,5x} \right]_0^2 - \int_0^2 2 \cdot e^{0,5x} dx \right| = \left| \left[ (x-2) \cdot 2 \cdot e^{0,5x} \right]_0^2 - \left[ 4 \cdot e^{0,5x} \right]_0^2 \right| = 4e - 8 \approx 2,87$$

FE

##### Teil c)

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot (0 - u) \cdot ((f(u) - 0)) = (u - \frac{1}{2}u^2) \cdot e^{0,5u} \text{ mit } A'(u) = (1 - \frac{3}{2}u - \frac{1}{4}u^2)e^{0,5u} \text{ und } A''(u) = -(1 + \frac{5}{4}u + \frac{1}{8}u^2)e^{0,5u} \Rightarrow \text{rel. und abs Maximum bei } u = -3 - \sqrt{13}.$$

### Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe

Für jedes positive reelle  $t$  ist die Funktion  $f_t$  gegeben durch  $f_t(x) = x + e^{t-x}$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Ihr Schaubild heißt  $K_t$ .

- Untersuchen Sie  $K_2$  auf den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeigen Sie, dass es keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse gibt. Zeichnen Sie  $K_2$  im Bereich  $-0,5 \leq x \leq 5$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ . (12)
- Untersuchen Sie, für welchen Wert von  $t \in \mathbb{R}$  das Schaubild  $K_t$  die  $x$ -Achse berührt. (6)
- Zeigen Sie, dass  $F_t$  mit  $F_t(x) = 0,5x^2 - e^{t-x}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f_t$  ist. Das Schaubild  $K_2$ , die  $y$ -Achse, die 1. Winkelhalbierende und die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u > 0$  schließen eine Fläche mit dem Inhalt  $A(u)$  ein. Berechnen Sie  $A(u)$ . (5)
- Die Gerade mit der Gleichung  $x = a$  ( $a > 0$ ) schneidet das Schaubild  $K_2$  im Punkt  $Q$  und die 1. Winkelhalbierende im Punkt  $P$ . Der Ursprung  $O$  sowie die Punkte  $P$  und  $Q$  sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie  $a$  so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $OPQ$  ein relatives Maximum annimmt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (7)

#### Lösung

##### Teil a)

Ableitungen:  $f_2'(x) = 1 - e^{2-x}$ ,  $f_2''(x) = e^{2-x}$ ,  $f_2'''(x) = -e^{2-x}$  (3)

Schnittpunkte mit der  $y$ -Achse ( $x = 0$ ):  $N(0|e^2)$  (1)

Asymptote  $g(x) = x$ , da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1] = 0$  (1)

Tiefpunkt ( $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$ ):  $T(2|3)$  (3)

keine Wendepunkte, da  $f''(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R}$  (1)

kein Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse,  $y_{TP} = 3 > 0$  und kein WP. (1)

Wertetabelle und Schaubild (2)

**Teil b )**

$$\text{Ableitungen: } f_t(x) = x + e^{t-x}, f_t'(x) = 1 - e^{t-x} \text{ und } f_t''(x) = e^{t-x} \quad (2)$$

$$\text{Tiefpunkt: } (f_t'(x)=0 \text{ und } f_t''(x)>0) \quad T(t|t+1) \quad (3)$$

$$T \text{ liegt auf der } x\text{-Achse, falls } t+1 = 0 \Rightarrow t = -1. \quad (1)$$

**Teil c )**

$$\text{Stammfunktion: } F_t'(x) = f_t(x) \quad (2)$$

$$\text{Flächenberechnung: } A(u) = F(u) - F(0) = e^2(1 - e^{-u}). \quad (3)$$

**Teil d)**

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (f_2(a) - a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e^{2-a} \text{ mit } a > 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow A'(a) = \frac{1}{2} \cdot (1-a) \cdot e^{2-a} \text{ und } A''(a) = \frac{1}{2} \cdot (a-2) \cdot e^{2-a} \quad (2)$$

$$\text{rel. Max bei } a = 1. \text{ Randwerte } A(0) = \lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = 0 \Rightarrow \text{abs. Max bei } A = 1 \text{ mit } A(1) = \frac{1}{2} e. \quad (3)$$

**Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe**

Für jedes positive reelle  $t$  ist die Funktion  $f_t$  gegeben durch  $f_t(x) = e^{t+x} - x$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Ihr Schaubild heißt  $K_t$ .

- Untersuchen Sie  $K_2$  auf den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeigen Sie, dass es keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse gibt. Zeichnen Sie  $K_2$  im Bereich  $-5 \leq x \leq 0,5$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ . (12)
- Untersuchen Sie, für welchen Wert von  $t \in \mathbb{R}$  das Schaubild  $K_t$  die  $x$ -Achse berührt. (6)
- Zeigen Sie, dass  $F_t$  mit  $F_t(x) = e^{t+x} - 0,5x^2$  mit  $x \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f_t$  ist. Das Schaubild  $K_2$ , die  $y$ -Achse, die Gerade  $y = -x$  und die Senkrechte  $x = -u$  mit  $u > 0$  schließen eine Fläche mit dem Inhalt  $A(u)$  ein. Berechnen Sie  $A(u)$ . (5)
- Die Gerade mit der Gleichung  $x = -a$  ( $a > 0$ ) schneidet das Schaubild  $K_2$  im Punkt  $Q$  und die Gerade  $y = -x$  im Punkt  $P$ . Der Ursprung  $O$  sowie die Punkte  $P$  und  $Q$  sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie  $a$  so, das der Flächeninhalt des Dreiecks  $OPQ$  ein relatives Maximum annimmt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (7)

**Lösung****Teil a)**

$$\text{Ableitungen: } f_2(x) = e^{2+x} - x, f_2'(x) = e^{2+x} - 1, f_2''(x) = e^{2+x} \text{ und } f_2'''(x) = e^{2+x} \quad (3)$$

$$\text{Schnittpunkte mit der } y\text{-Achse } (x=0): N(0|e^2) \quad (1)$$

$$\text{Asymptote } g(x) = -x, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -1 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = 0 \quad (1)$$

$$\text{Tiefpunkt } (f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0): T(-2|3) \quad (3)$$

$$\text{keine Wendepunkte, da } f''(x) > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{kein Schnittpunkt mit der } x\text{-Achse, } y_{TP} = 3 > 0 \text{ und kein Wendepunkt.} \quad (1)$$

$$\text{Wertetabelle und Schaubild:} \quad (2)$$

**Teil b)**

$$\text{Ableitungen: } f_t(x) = e^{t+x} - x, f_t'(x) = e^{t+x} - 1 \text{ und } f_t''(x) = e^{t+x} \quad (2)$$

$$\text{Tiefpunkt: } (f_t'(x)=0 \text{ und } f_t''(x)>0) \quad T(-t|t+1) \quad (3)$$

$$T \text{ liegt auf der } x\text{-Achse, falls } t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1. \quad (1)$$

**Teil c)**

$$\text{Stammfunktion: } F_t'(x) = f_t(x) \quad (2)$$

$$\text{Flächenberechnung: } A(u) = F(0) - F(-u) = e^2(1 - e^{-u}). \quad (3)$$

**Teil d)**

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (f_2(-a) - a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e^{2-a} \text{ mit } a > 0. \quad (3)$$

$$A'(a) = \frac{1}{2} \cdot (1-a) \cdot e^{2-a} \text{ und } A''(a) = \frac{1}{2} \cdot (a-2) \cdot e^{2-a} \quad (2)$$

$$\text{relatives Maximum } (A'(a) = 0 \text{ und } A''(a) < 0) \text{ bei } a = 1 \quad (2)$$

$$\text{maximale Fläche: } A(1) = \frac{1}{2} e. \quad (1)$$

#### Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe, Ortskurve

Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  sind die Funktionen  $f_t$  und  $g$  gegeben durch  $f_t'(x) = (t - x) \cdot e^{t+x}$  und  $g(x) = -x \cdot e^{1+x}$ .  $K_t$  ist das Schaubild von  $f_t$  und  $G$  ist das Schaubild von  $g$ .

- Zeigen Sie, daß  $f_t'(x) = g(x)$  ist. Untersuchen Sie  $K_t$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie  $K_t$  und  $G$  für  $-5 \leq x \leq 1$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ . (12)
- $K_t$  und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Feld eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (6)
- Die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u \leq 0$  schneidet  $K_t$  in A und  $G$  in B. Die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie  $u$  so, dass die Fläche dieses Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. (7)
- Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von  $K_t$ . (5)

#### Lösung

##### Teil a)

$$\text{Ableitungen: } f_t'(x) = -x \cdot e^{1+x}, f_t''(x) = (-x-1) \cdot e^{1+x} \quad (2)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0): } N_y(0|e) \quad (0,5)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der x-Achse (f(x) = 0): } N_x(1|0) \quad (1)$$

$$\text{Hochpunkt (f}_t'(x) = 0 \text{ mit VZW): } H(0|e) \quad (2)$$

$$\text{Wendepunkt (f}_t''(x) = 0 \text{ mit VZW): } W(-1|2) \quad (3)$$

$$\text{Asymptote: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \text{ also waagr. A. } y = 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty \quad (0,5)$$

$$\text{Wertetabelle und Schaubild:} \quad (3)$$

##### Teil b)

$$A = \int_0^1 (1-x) \cdot e^{1+x} dx \quad (1)$$

$$= \left[ (1-x) \cdot e^{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot e^{1+x} dx \quad (3)$$

$$= \left[ (1-x) \cdot e^{1+x} \right]_0^1 + \left[ e^{1+x} \right]_0^1 \quad (1)$$

$$= e^2 - 2e \quad (1)$$

##### Teil c)

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (-u) \cdot (f_t(u) - g(u)) = -\frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{1+u} \text{ mit } u \leq 0 \quad (1,5)$$

$$\Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{2} \cdot (1+u) \cdot e^{1+u} \text{ und } A''(u) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}u\right) \cdot e^{1+u} \quad (2)$$

$$\text{relatives Maximum (A'(u) = 0 und A''(u) < 0) bei } u = -1 \quad (1)$$

$$\text{Randwerte: } A(0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{absolutes Maximum bei } u = -1 \text{ mit } A(-1) = 0,5. \quad (1)$$

##### Teil d)

$$\text{Ableitungen: } f_t'(t) = (t-1-x) \cdot e^{t+x}, f_t''(t) = (t-2-x) \cdot e^{t+x} \text{ und } f_t'''(t) = (t-3-x) \cdot e^{t+x} \quad (3)$$

$$\text{Wendepunkt (f}_t''(x) = 0 \text{ mit VZW): } W(t-2|2 \cdot e^{2t-2}) \quad (1)$$

$$\text{Ortskurve: } y = 2 \cdot e^{2x+2} \text{ mit } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

#### Aufgabe 5: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe, Ortskurve

Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  sind die Funktionen  $f_t$  und  $g$  gegeben durch  $f_t'(x) = (t+x) \cdot e^{t-x}$  und  $g(x) = x \cdot e^{1-x}$ .  $K_t$  ist das Schaubild von  $f_t$  und  $G$  ist das Schaubild von  $g$ .

- Zeigen Sie, daß  $f_t'(x) = -g(x)$  ist. Untersuchen Sie  $K_t$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie  $K_t$  und  $G$  für  $-1 \leq x \leq 5$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ . (12)
- $K_t$  und die Koordinatenachsen begrenzen im zweiten Feld eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (6)
- Die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u \geq 0$  schneidet  $K_t$  in A und  $G$  in B. Die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie  $u$  so, dass die Fläche dieses Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. (7)
- Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von  $K_t$ . (5)

## Lösung

### Teil a)

$$\text{Ableitungen: } f_1(x) = (1+x) \cdot e^{1-x}, f_1'(x) = -x \cdot e^{1-x} \text{ und } f_1''(x) = (x-1) \cdot e^{1-x} \quad (2)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der y-Achse (x=0): } N_y(0|e) \quad (0,5)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der x-Achse (f(x)=0): } N_x(-1|0) \quad (1)$$

$$\text{Hochpunkt (f}'_1(x) = 0 \text{ und } f''_1(x) < 0): H(0|e) \quad (2)$$

$$\text{Wendepunkt (f}''_1(x) = 0 \text{ mit VZW): } W(1|2) \quad (3)$$

$$\text{Asymptote: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0, \text{ also waagrechte Asymptote } y = 0 \text{ für } x \rightarrow +\infty \quad (0,5)$$

$$\text{Wertetabelle und Schaubild: (vgl. Gruppe A)} \quad (3)$$

### Teil b)

$$A = \int_{-1}^0 (1+x) \cdot e^{1-x} dx \quad (1)$$

$$= \left[ (1+x) \cdot (-e^{1-x}) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^{1-x} dx \quad (\text{Produktintegration}) \quad (3)$$

$$= \left[ (1+x) \cdot (-e^{1-x}) \right]_{-1}^0 - \left[ e^{1-x} \right]_{-1}^0 \quad (1)$$

$$= e^2 - 2e \quad (1)$$

### Teil c)

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (f_1(u) - g(u)) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{1-u} \quad (1,5)$$

$$\text{Ableitungen: } A'(u) = -\frac{1}{2} \cdot (1+u) \cdot e^{1+u} \text{ und } A''(u) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}u\right) \cdot e^{1+u} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{relatives Maximum (A}'(u) = 0 \text{ und A}''(u) < 0) \text{ bei } u = -1 \quad (1)$$

$$\text{Randwerte } A(0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{absolutes Maximum bei } u = -1 \text{ mit } A(-1) = 0,5. \quad (1)$$

### Teil d)

$$\text{Ableitungen: } f_t'(t) = (t-1-x) \cdot e^{t+x}, f_t''(t) = (t-2-x) \cdot e^{t+x} \text{ und } f_t'''(t) = (t-3-x) \cdot e^{t+x} \quad (3)$$

$$\text{Wendepunkt (f}''_t(x) = 0 \text{ und f}'''_t(x) \neq 0): W(t-2 | 2 \cdot e^{2t-2}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Ortskurve: } y = 2 \cdot e^{2x+2} \text{ mit } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

## Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Rotationskörper, Optimierungsaufgabe

- Untersuchen Sie das Schaubild von  $f_t(x) = (2t-x) \cdot e^{tx}$  für  $t > 0$  auf Achsenschnittpunkte, Extrem- sowie Wendepunkte. und skizzieren Sie den Verlauf von  $f_t$ . (10)
- Berechnen Sie die Fläche, die durch  $f_t$  und die Koordinatenachsen im 1. Feld begrenzt wird. (6)
- Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau das Volumen in  $\text{dm}^3$  und das Gewicht in  $\text{kg}$  einer Salatschüssel aus Glas ( $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ ), die durch die im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  um die  $x$ -Achse rotierenden Schaubilder von  $f_{0,8}$  und  $f_{0,775}$  begrenzt wird. (1 LE = 1 dm) (6)
- Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau die Kantenlängen und den Flächeninhalt des größten Rechteckes, das in den Raum zwischen den Koordinatenachsen und dem Schaubild von  $f_{0,5}$  gelegt werden kann. (6)

## Lösung

### Teil a)

$$\text{Achsenschnittpunkte: } S_x(2t|0) \text{ und } S_y(0|2t) \quad (1)$$

$$\text{Ableitungen: } f_t'(x) = (-tx + 2t^2 - 1) \cdot e^{tx} \text{ und } f_t''(x) = (-t^2x + 2t^3 - 2t) \cdot e^{tx} \quad (2)$$

$$\text{Hochpunkt (f}'_t(x) = 0 \text{ und } f''_t(x) < 0): H\left(2t - \frac{1}{t} \mid \frac{1}{t} \cdot e^{2t^2-1}\right) \quad (3)$$

$$\text{Wendepunkt (f}''_t(x) = 0 \text{ mit VZW da einfache NST): } W\left(2t - \frac{2}{t} \mid \frac{2}{t} \cdot e^{2t^2-2}\right) \quad (3)$$

$$\text{Schaubildskizze:} \quad (1)$$

**Teil b)**

$$A_t = \int_0^{2t} (2t - x)e^{tx} dx \quad (1)$$

$$= \left[ (2t - x) \cdot \frac{1}{t} e^{tx} \right]_0^{2t} - \int_0^{2t} -\frac{1}{t} e^{tx} dx$$

(2)

$$= \left[ \left( -\frac{x}{t} + 2 + \frac{1}{t^2} \right) e^{tx} \right]_0^{2t} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{t^2} (e^{2t^2} - 1) - 2 \quad (2)$$

**Teil c)**

$$V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} \quad (1)$$

$$= \pi \int_0^{1,6} (1,6 - x)^2 e^{1,6x} dx - \pi \int_0^{1,55} (1,55 - x)^2 e^{1,55x} dx \quad (2)$$

$$= 9,356 - 8,035 \quad (\text{MATH 9: fnint}) \quad (2)$$

$$= 1,321 \text{ dm}^3$$

$$M = \rho V = 3,3 \text{ kg} \quad (1)$$

**Teil d)**

$$A(u) = b \cdot h = u \cdot f_{0,5}(u) = u \cdot (1 - u) \cdot e^{0,5u} \text{ mit } A_t'(u) = (-0,5u^2 - 1,5u + 1) \cdot e^{0,5u} \quad (2)$$

$$\Rightarrow H(0,561 | 0,326) \quad (\text{CALC 4: maximum}) \quad (2)$$

$\Rightarrow$  Das Rechteck hat die Breite  $u = 0,561$ , die Höhe  $f_{0,5}(u) = 0,581$  (CALC 1: value)

$$\text{und die Fläche } A(u) = 0,326 \text{ FE} \quad (2)$$

**Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung, Rotationskörper**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 4}$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Das Schaubild von  $f$  sei  $K$ .

a) Skizzieren Sie  $K$  mit Hilfe Ihres Taschenrechners (1)

b) Das Flächenstück zwischen  $K$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = 0$  und  $x = 2$  rotiert um die  $x$ -Achse. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers. (2)

c) Welche Eigenschaften von  $K$  können dem Funktionsterm  $f(x)$  ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden? Begründen Sie. (5)

**Lösung**

**Teil a)** Skizze (1)

**Teil b)**

$$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 \left( \frac{2}{1 + 4e^{-2x}} \right)^2 dx = 10,86 \text{ VE} \quad (\text{CALC: } \int Sf(x) dx) \quad (2)$$

**Teil c)**

$$f(x) > 0; \text{ da } 2e^{2x} > 0 \text{ und } e^{2x} + 4 > 0 \Rightarrow K \text{ besitzt keine Schnittpunkte mit der } x\text{-Achse.} \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{2}{5} \Rightarrow S(0 | \frac{2}{5}) \text{ ist Schnittpunkt von } K \text{ mit der } y\text{-Achse.} \quad (0,5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + 4e^{-2x}} = 0 \Rightarrow K \text{ besitzt die waagrechte Asymptote } y = 0. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 4e^{-2x}} = 2 \Rightarrow K \text{ besitzt die waagrechte Asymptote } y = 2. \quad (1)$$

$$1 + 4e^{-2x} \text{ fällt streng monoton} \Rightarrow \frac{2}{1 + 4e^{-2x}} \text{ wächst streng monoton;} \quad (1)$$

Da  $f$  streng monoton wächst, besitzt  $K$  **keine Extrempunkte**. (0,5)

### Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung, Rotationskörper

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{4 - e^{2x}}{4 + e^{2x}}$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Das Schaubild von  $f$  sei  $K$ .

- Skizzieren Sie  $K$  mit Hilfe Ihres Taschenrechners (1)
- Das Flächenstück zwischen  $K$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = -2$  und  $x = 0$  rotiert um die  $x$ -Achse. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers. (2)
- Welche Eigenschaften von  $K$  können dem Funktionsterm  $f(x)$  ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden? Begründen Sie. (5)

#### Lösung

Teil a) Skizze

(1)

Teil b)

$$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^0 \left( \frac{4 - e^{2x}}{4 + e^{2x}} \right)^2 dx = 5,06 \text{ VE (CALC: } \int Sf(x)dx) \quad (2)$$

Teil c)

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln 4 \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \ln 4 | 0\right) \text{ ist Schnittpunkt von } K \text{ mit der } x\text{-Achse.} \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow S\left(0 \mid \frac{3}{5}\right) \text{ ist Schnittpunkt von } K \text{ mit der } y\text{-Achse.} \quad (0,5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - e^{2x}}{4 + e^{2x}} = 1 \Rightarrow K \text{ besitzt die waagrechte Asymptote } y = 1. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - e^{2x}}{4 + e^{2x}} = -1 \Rightarrow K \text{ besitzt die waagrechte Asymptote } y = -1. \quad (1)$$

$$4 - e^{2x} \text{ fällt streng monoton und } 4 + e^{2x} \text{ wächst streng monoton} \Rightarrow \frac{4 - e^{2x}}{4 + e^{2x}} \text{ fällt streng monoton;} \quad (1)$$

Da  $f$  streng monoton fällt, besitzt  $K$  **keine Extrempunkte**. (0,5)

### Aufgabe 9: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2}$  und  $g(x) = e^x - e$  mit den Schaubildern  $K$  und  $G$ .

- Untersuchen Sie  $K$  auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie  $K$  und  $G$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$  in ein gemeinsames Koordinatensystem. (12)
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Schaubilder  $K$  und  $G$  sowie die  $y$ -Achse begrenzt wird. (8)
- Bestimmen Sie  $u$  mit  $0 \leq u \leq 1$  so, dass das Dreieck mit den Ecken  $O(0|0)$ ,  $P(u|f(u))$  und  $Q(u|g(u))$  eine maximale Fläche erhält. (10)

### Aufgabe 10: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = e^x - ex$  und  $g(x) = e^x - e$ . Die Schaubilder von  $f$  und  $g$  heißen  $K$  und  $G$ .

- Untersuchen Sie  $K$  auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie  $K$  und  $G$  sowie die Gerade  $A(x) = -ex$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  mit  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$  in ein gemeinsames Koordinatensystem. Begründen Sie mit Hilfe der Grenzwertschreibweise und anhand der Zeichnung, dass  $A(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  eine Asymptote für  $K$  ist. (12)
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Schaubilder  $K$  und  $G$  sowie die  $y$ -Achse begrenzt wird. (8)
- Bestimmen Sie  $u$  mit  $0 \leq u \leq 1$  so, dass das Dreieck mit den Ecken  $O(0|0)$ ,  $P(u|f(u))$  und  $Q(u|g(u))$  eine maximale Fläche erhält.