

5.5. Abituraufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung, Integration, Tangenten (15)

- a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. (**Lösung:** $t_{1/2} = \mp 4x \pm 4$) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und ihren Wendetangenten mit Hilfe dieser Punkte in einem passenden Bereich.
- b) Berechnen Sie den Inhalte der Fläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Lösung

- a) Symmetrie: $f(x) = f(-x)$ (gerade Funktion, Symmetrie zur y-Achse) (1)
- Achsenschnittpunkte: $x = 0 \Rightarrow S_y(0 | \frac{5}{2})$, (1)
- $y = 0$ mit Substitution $z = x^2$ und p-q-Formel $\Rightarrow S_{x^{1/2}}(\pm 1 | 0)$, $S_{x^{3/4}}(\pm \sqrt{5} | 0)$ (1)
- Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 - 6x$ und $f''(x) = 6x^2 - 6$ (1)
- Hoch- und Tiefpunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0 \Rightarrow H(0 | \frac{5}{2})$ und $T_{1/2}(\pm \sqrt{3} | -2)$ (2)
- Wendepunkte: $f''(x) = 0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm 1 | 0)$ (1)
- Wendetangenten: $t_{1/2}(x) = \mp 4x \pm 4$ (2)
- Schaubildskizze (1)
- b) $A = 2 \int_0^1 (t_1(x) - f(x)) dx = 2 \cdot \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4x + \frac{3}{2}) dx$ (2)
- $= 2 \cdot \left[-\frac{1}{10}x^5 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = \frac{6}{5}$ FE (3)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung, Integration, Tangenten (15)

- a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. (**Lösung:** $t_{1/2} = \mp 2x \pm 2$) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und ihren Wendetangenten mit Hilfe dieser Punkte in einem passenden Bereich.
- b) Berechnen Sie den Inhalte der Fläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Lösung

- a) Symmetrie: $f(x) = f(-x)$ (gerade Funktion, Symmetrie zur y-Achse) (1)
- Achsenschnittpunkte: $x = 0 \Rightarrow S_y(0 | -\frac{5}{4})$, (1)
- $y = 0$ mit Substitution $z = x^2$ und p-q-Formel $\Rightarrow S_{x^{1/2}}(\pm 1 | 0)$, $S_{x^{3/4}}(\pm \sqrt{5} | 0)$ (1)
- Ableitungen: $f'(x) = -x^3 + 3x$ und $f''(x) = -3x^2 + 3$ (1)
- Hoch- und Tiefpunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0 \Rightarrow H(0 | -\frac{5}{4})$ und $T_{1/2}(\pm \sqrt{3} | 1)$ (2)
- Wendepunkte: $f''(x) = 0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm 1 | 0)$ (1)
- Wendetangenten: $t_{1/2}(x) = \mp 2x \pm 2$ (2)
- Schaubildskizze (1)
- b) $A = 2 \int_0^1 (f(x) - t_2(x)) dx = 2 \cdot \int_0^1 (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4}) dx$ (2)
- $= 2 \cdot \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^1 = \frac{3}{5}$ FE (3)

Aufgabe 3: Symmetrienachweis durch Verschiebung, Extremwertaufgabe, Integration (25)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K .

- Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendpunkte. Geben Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an. Zeichnen Sie K für $-4,5 \leq x \leq 2,5$ mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$. (10)
- Zeigen Sie durch eine geeignete Verschiebung des Schaubildes, dass K symmetrisch ist zu $N(1|0)$. Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche, die von K und der x -Achse eingeschlossen wird. (7)
- Zeichnen Sie die Kurve G der Funktion g mit $g(x) = -x^2 + \frac{8}{3}$ für $-3 \leq x \leq 3$ in das Achsenkreuz aus Teilaufgabe a) ein. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($0 \leq u \leq 2$) schneidet die Kurve K im Punkt R und die Kurve G im Punkt S . Für welches u wird der Inhalt des Dreiecks RSO am größten? Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt. (8)

Lösung

a) Schnittpunkt mit der y -Achse: $(x=0) S_y(0|\frac{8}{3})$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x -Achse: $(f(x)=0) N_1(-1|0), N_2(2|0)$ und $N_3(-4|0)$ (1,5)

Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}$, $f'(x) = -x^2 - 2x + 2$ und $f''(x) = -2x - 2$ (2)

Hoch- und Tiefpunkte: $T(-1+\sqrt{3}|3,46) \approx T(0,73|3,46)$ und $H(-1-\sqrt{3}|-3,46) \approx H(-2,73|-3,46)$ (1,5)

Wendepunkte: $(f''(x)=0)$ mit VZW bzw. $f''(x \neq 0) W(-1|0)$ (1,5)

Schaubild: (an x -Achse gespiegelt) (2) + (1) \rightarrow d)

b) Symmetrie: $f(x-1) = -(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}) - (x^2 - 2x + 1) + (2x - 2) + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}x^3 + x$ (1)

$A = \left| \int_{-4}^{-1} (-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}) dx \right| + \left| \int_{-1}^2 (-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}) dx \right|$ (oder $A = 2 \cdot |\dots|$) (1)

$= \left| \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3}x \right]_{-4}^{-1} \right| + \left| \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3}x \right]_{-1}^2 \right|$ (2)

$= \left| \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{256}{12} + \frac{64}{3} + 16 - \frac{32}{3} \right) \right| + \left| \left(-\frac{16}{12} - \frac{8}{3} + 4 + \frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{8}{3} \right) \right|$ (1)

$= \left| -\frac{17}{12} - \frac{16}{3} \right| + \left| \frac{16}{3} + \frac{17}{12} \right|$ (1)

$= \frac{27}{4} + \frac{27}{4}$
 $= 13,5 \text{ FE}$ (1)

c) Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $O(0|0)$, $R(u|f(u))$ und $S(u|g(u))$:

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}u^3 - u^2 + 2u + \frac{8}{3} \right) - \left(-u^2 + \frac{8}{3} \right) \right] \cdot u = -\frac{1}{6}u^4 + u^2$ mit $0 \leq u \leq 2$ (2)

Ableitungen: $A'(u) = -\frac{2}{3}u^3 + 2u$ und $A''(u) = -2u^2 + 2$ (2)

relatives Maximum auf $[0;2]$: $(A'(u) = 0 \text{ und } A''(u) < 0)$ bei $u = \sqrt{3}$ (1)

Randwerte: $A(0) = 0$, $A(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$ und $A(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow$ absolutes Max für $u = \sqrt{3}$ mit $A(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$. (2)

Aufgabe 4: Symmetrienachweis durch Verschiebung, Extremwertaufgabe, Integration (25)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K .

- Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendpunkte. Geben Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an. Zeichnen Sie K für $-2,5 \leq x \leq 4,5$ mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$. (10)
- Ziegen Sie durch eine geeignete Verschiebung des Schaubildes, dass K symmetrisch ist zu $N(-1|0)$. Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche, die von K und der x -Achse eingeschlossen wird. (7)
- Zeichnen Sie die Kurve G der Funktion g mit $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4$ für $-3 \leq x \leq 3$ in das Achsenkreuz aus Teilaufgabe a) ein. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($0 \leq u \leq 2$) schneidet die Kurve K im Punkt R und die Kurve G im Punkt S . Für welches u wird der Inhalt des Dreiecks RSO am größten? Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt. (8)

Lösung

a) Schnittpunkt mit der y -Achse: $(x = 0) S_y(0|4)$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x -Achse: $(f(x) = 0) N_1(-1|0), N_2(2|0)$ und $N_3(-4|0)$ (1,5)

Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4, f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 3$ und $f''(x) = -3x - 3$ (2)

Hoch- und Tiefpunkte: $T(-1 + \sqrt{3} | 5,19) \approx T(0,73 | 5,19)$ und $H(-1 - \sqrt{3} | -5,19) \approx H(-2,73 | -5,19)$ (3)

Wendpunkte: $(f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0) W(-1|0)$ (1,5)

Schaubild: (vgl. Gruppe A) (2) + (1) \rightarrow d)

b) Symmetrie: $f(x-1) = -(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}) + (3x-3) + 4 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$ (1)

A = $\left| \int_{-4}^{-1} (-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4) dx \right| + \left| \int_{-1}^2 (-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4) dx \right|$ (2)

= $\left| \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-4}^{-1} \right| + \left| \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \right|$ (2)

= $\left| \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4 \right) - \left(-\frac{256}{8} + \frac{64}{2} + 24 - 16 \right) \right| + \left| \left(-\frac{16}{8} - \frac{8}{2} + 6 + 8 \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4 \right) \right|$ (1)

= $\left| -\frac{17}{8} - 8 \right| + \left| 8 + \frac{17}{8} \right|$ (1)

= $\frac{81}{8} + \frac{81}{8}$
= 20,25 FE (1)

c) Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $O(0|0), R(u|f(u))$ und $S(u|g(u))$:

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 3u + 4 \right) - \left(-\frac{3}{2}u^2 + 4 \right) \right] \cdot u = -\frac{1}{4}u^4 + \frac{3}{2}u^2$ mit $0 \leq u \leq 2$ (2)

Ableitungen: $A'(u) = -u^3 + 3u$ und $A''(u) = -3u^2 + 3$ (2)

relatives Maximum auf $[0;2]$: $(A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0)$ bei $u = \sqrt{3}$ (1)

Randwerte: $A(0) = 0, A(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$ und $A(2) = 2 \Rightarrow$ absolutes Max für $u = \sqrt{3}$ mit $A(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$. (2)

Aufgabe 5: Kurvenuntersuchung Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f mit dem Schaubild K gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 24)$.

- Untersuchen Sie das Schaubild K auf Hoch-, Tief- und Wendpunkte. Zeichnen Sie K im Bereich $-2,5 \leq x \leq 6,5$ mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$. (7)
- Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ und das Schaubild K begrenzen zwei Flächenstücke. Berechnen Sie deren Gesamtinhalt. (7)
- Für $-2 \leq u \leq 2$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = u$ das Schaubild im Punkt A und die Gerade aus Teilaufgabe b) im Punkt B . Der Punkt $C(2|1)$ bildet mit den Punkten A und B ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird das Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal? (10)

Lösung

a) Ableitungen: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 24)$, $f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 12x)$, $f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 12)$ und $f'''(x) = \frac{3}{4}$ (1,5)

Extrema: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) </> 0$) T(4|-1) und H(0|3) (3)

Wendepunkt: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$) W(2|1) (1,5)

Skizze: (1)

- b) Schnittpunkte von g und K: Entweder rechnerisch durch Gleichsetzen $g(x) = f(x)$ (ergibt Gleichung 3. Grades => Probieren) oder durch ablesen der Punkte aus dem Schaubild und Punktprobe: $x_1 = -23$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$ (1)

$$A = \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_2^6 (f(x) - g(x)) dx \right| \quad (1)$$

$$= \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right) dx \right| + \left| \int_2^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right) dx \right| \quad (1)$$

$$= \left| \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_2^6 \right| \quad (1)$$

$$= \left| \left(\frac{1}{16} - 2 - 1 + 6 \right) - \left(\frac{1}{16} + 2 - 1 - 6 \right) \right| + \left| \left(\frac{81}{2} - 54 - 9 + 18 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 - 1 + 6 \right) \right| \quad (1)$$

$$= |8| + |-8| \quad (1)$$

$$= 16 \text{ FE.} \quad (1)$$

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} (f(u) - g(u)) \cdot (2 - u) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{2}u + 3 \right) \cdot (2 - u)$

$$= -\frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^2 - 2u + 3 \Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - u - 2 \quad (3)$$

Maximum: ($A'(u)=0$ ergibt Gleichung 3. Grades => Probieren)

$$u_1 = 2 - \sqrt{8} \quad (\text{relatives Maximum}) \quad (1)$$

$$u_2 = 2 \quad (\text{relatives Minimum}) \quad (1)$$

$$u_3 = 2 + \sqrt{8} \quad (\text{außerhalb des zulässigen Bereiches}) \quad (1)$$

Randwerte: $A(-2) = 0$, $A(2)$ ist rel. Minimum \Rightarrow abs. Maximum bei $u_1 = 2 - \sqrt{8}$ mit $A(2 - \sqrt{8}) = 4$. (3)

Aufgabe 6. Kurvenuntersuchung Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f mit dem Schaubild K gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2 - 24)$.

- a) Untersuchen Sie das Schaubild K auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K im Bereich $-6,5 \leq x \leq 2,5$ mit 1 LE = 1cm. (7)
- b) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ und das Schaubild K begrenzen zwei Flächenstücke. Berechnen Sie deren Gesamthalt. (7)
- c) Für $-2 \leq u \leq 2$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $x = u$ das Schaubild im Punkt A und die Gerade aus Teilaufgabe b) im Punkt B. Der Punkt C(-2|-1) bildet mit den Punkten A und B ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird das Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal? (10)

Lösung

a) Ableitungen: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2 - 24)$, $f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 12x)$ und $f''(x) = \frac{1}{8}(6x + 12)$ (1,5)

Extrema: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) </> 0$) T(-4|1) und H(0|-3) (3)

Wendepunkt: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$) W(-2|-1) (1,5)

Wertetabelle und Schaubild: (vgl. Gruppe A) (1)

- b) Schnittpunkte von g und K: Entweder rechnerisch durch Gleichsetzen $g(x) = f(x)$ (ergibt Gleichung 3. Grades \Rightarrow Probieren) oder durch ablesen der Punkt aus dem Schaubild und Punktprobe: $x_1 = 23$, $x_2 = -6$, $x_3 = -2$ (1)

$$A = \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_2^6 (f(x) - g(x)) dx \right| \quad (1)$$

$$= \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \right) dx \right| + \left| \int_2^6 \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \right) dx \right| \quad (1)$$

$$= \left| \left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x \right]_{-2}^6 \right| \quad (1)$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - 2 - 1 + 6 \right) - \left(\frac{81}{2} - 54 - 9 + 18 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{16} + 2 - 1 - 6 \right) - \left(\frac{1}{16} - 2 - 1 + 6 \right) \right| \quad (1)$$

$$= |8| + |-8| \quad (1)$$

$$= 16 \text{ FE.} \quad (1)$$

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} (g(u) - f(u)) \cdot (2 + u) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{1}{2}u + 3 \right) \cdot (2 + u) = -\frac{1}{16}u^4 - \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^2$

$$+ 2u + 3 \Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{2}u^2 - u + 2 \text{ und } A''(u) = -\frac{3}{4}u^2 - 3u - 1 \quad (3)$$

Maximum: ($A'(u)=0$ ergibt Gleichung 3. Grades \Rightarrow Probieren): $u_1 = -2 + \sqrt{8}$ (relatives Maximum), $u_2 = -2$ (relatives Minimum) und $u_3 = -2 - \sqrt{8}$ (außerhalb des zulässigen Bereiches) (3)

Randwerte: $A(-2)$ ist rel. Minimum, $A(2) = 0 \Rightarrow$ abs. Maximum bei $u_1 = -2 + \sqrt{8}$ mit maximaler Fläche $A(-2 + \sqrt{8}) = 4$. (1)

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Gegeben ist $f_t(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{t}{3}x^2 - t^2x + 3t^2 - 3t - 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^*_+$. Das Schaubild von f_t heißt K_t .

- a) Untersuchen Sie K_1 auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 für $-4 \leq x \leq 4$ mit 1 LE = 1cm. (10)
- b) Bestimmen Sie die Ortskurve des Hochpunktes von K_t . (6)
- c) Die Senkrechte $x = u$ mit $-3 \leq x \leq 3$ schneidet K_1 in R und die x-Achse in P. K_1 schneidet die positive x-Achse in Q. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck PQR annehmen kann. (6)

Lösung

a) Ableitungen: $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x - 3$, $f_1'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$ und $f_1''(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ (2)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|-3)$ (0,5)

Schnittpunkte mit der x-Achse ($f_1(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x+3)^2 \Rightarrow S_{x_1}(3|0)$ und $S_{x_{2/3}}(-3|0)$ (doppelt) (2,5)

Extrema: ($f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) </> 0$) $T(1|-\frac{32}{9})$ und $H(-3|0)$ (4)

Wendepunkte: ($f_1''(x) = 0$ mit VZW) $W(-1|-\frac{16}{9})$ (3)

Skizze (1)

b) Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2t}{3}x - t^2$ und $f_t''(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2t}{3} \Rightarrow$ (2)

Hochpunkte ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) < 0$) $H(-t|3t^3 + 3t^2 - 3t - 3)$ (3)

\Rightarrow Ortskurve $y = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x - 3$ (1)

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3 - u) \cdot (0 - f(u)) = \frac{1}{18} (u^4 - 18u^2 + 81) \Rightarrow A'(u) = \frac{1}{18} (4u^3 - 36u)$ (3)

relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = 0$ mit $A(0) = 4,5$ FE. (2)

Bereichsgrenzen $A(-3) = A(3) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = 0$. (2)

Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe, Integration (24)

K ist das Schaubild der Funktion f_t mit $f_t = -\frac{x^2}{t^2}(x-3t)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^*_{+}$.

- Untersuchen Sie K_2 auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 für $-1 \leq x \leq 6$ mit 1 LE = 1 cm. (10)
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von K_t . (6)
- Die Senkrechte $x = u$ schneidet K_2 in P und die x-Achse in R. Gegeben ist außerdem der Punkt Q(0|6). Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck PQR annehmen kann. (8)

Lösung

$$a) f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2(x-6) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2, f_2'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x, f_2''(x) = -\frac{3}{2}x + 3, f_2'''(x) = -\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{Schnittpunkte mit der x-Achse: } (f(x)=0) N_{1/2}(0|0) \text{ (doppelte NST} \Rightarrow \text{Berührungspunkt) und } N_3(6|0) \quad (1)$$

$$\text{Hoch- und Tiefpunkte: } (f'(x)=0, f''(x) </> 0) T(0|0) \text{ und } H(4|8) \quad (4)$$

$$\text{Wendepunkte: } (f''(x)=0, f''' \neq 0 \text{ oder VZW von } f''(x)) W(2|4) \quad (2)$$

$$\text{Wertetabelle und Schaubild:} \quad (1)$$

$$b) f_t'(x) = -\frac{3}{t^2}x^2 + \frac{6}{t}x, f_t''(x) = -\frac{6}{t^2}x + \frac{6}{t} \quad (2)$$

$$\text{Hochpunkt: } (f_t'(x) = 0 \text{ und } f_t''(x) < 0) H(2t | 4t) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \text{Ortskurve der Hochpunkte } y = 2x \quad (1)$$

$$c) A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = (6-u) \cdot f_2(u) = \frac{1}{8}u^2(u-6)^2, \quad (2)$$

$$A'(u) = \frac{1}{2}u \cdot (u-6) \cdot (u-3), A''(u) = \frac{3}{2}(u^2 - 6u + 6) \quad (2)$$

$$\text{rel. Max } (A'(u) = 0 \text{ und } A''(u) < 0) \text{ bei } u = 3. \quad (2)$$

$$\text{Bereichsgrenzen: } A(0) = A(6) = 0 \Rightarrow \text{abs Max bei } u = 3 \text{ mit } A(3) = \frac{81}{8} \text{ FE.} \quad (2)$$

Aufgabe 9: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe (26)

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*_{+}$ sind die Funktionen f_t und g_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 - t^2x^2$ und $g_t(x) = (\frac{5}{2t} - t^2)x^2 - \frac{2}{t}$. Das Schaubild von f_t ist K_t , das Schaubild von g_t ist G_t .

- Untersuchen Sie das Schaubild K_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 und G_1 im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ mit 1 LE = 2 cm. (11)
- In den Raum, der zwischen K_1 und G_1 liegt, soll ein Rechteck maximaler Fläche eingepasst werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechteckes auf zwei Nachkommastellen gerundet an. (9)
- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_t und G_t . Für welches t wird der Abstand der beiden rechten Schnittpunkte minimal? Hinweis: Dieses Extremwertproblem lässt sich lösen **ohne** dabei irgendwelche Ableitungen zu bilden! (6)

Lösung

$$a) \text{ Ableitungen: } f_t'(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2t^2x, f_t''(x) = \frac{6}{t}x^2 - 2t^2 \text{ und } f_t'''(x) = \frac{12}{t}x \quad (2)$$

$$\text{Symmetrie: } f_t \text{ ist eine gerade Funktion, also symmetrisch zur y-Achse.} \quad (1)$$

$$\text{Schnittpunkte mit der x-Achse } N_{1/2}(0|0) \text{ (doppelte NST} \Rightarrow \text{Berührungspunkt) und } N_{3/4}(\pm\sqrt{2t^3} | 0) \quad (2)$$

$$\text{Extrempunkte } (f_t'(x) = 0 \text{ und } f_t''(x) \neq 0): H(0|0) \text{ und } T_{1/2}(\pm\sqrt{t^3} | -\frac{1}{2}t^5) \quad (4)$$

$$\text{Wendepunkte } (f_t''(x) = 0 \text{ mit VZW): } W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{t^3}{3}} | -\frac{5}{18}t^5) \quad (3)$$

$$\text{Schaubild (zusätzliche Werte: } f_t(\pm 2) = 4) \quad (1)$$

- b) Aus der Zeichnung lässt sich erkennen, dass von den Zwischenräumen in den Bereichen $-2 \leq x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ und $1 \leq x \leq 2$ der mittlere Bereich $-1 \leq x \leq 1$ deutlich größer ist als die beiden anderen. Es bietet sich daher an, die folgenden Eckpunkte mit $0 \leq x \leq 1$ zu wählen:

$$A(u|g(u))$$

$$B(u|f(u))$$

$$C(u|(f(-u))) = C(-u|f(u))$$

$$D(u|(g(-u))) = D(-u|g(u))$$

$$A(u) = b \cdot h = [u - (-u)] \cdot [f_1(u) - g_1(u)] = 2u \cdot [0,5u^4 - 2,5u^2 + 2] = u^5 - 5u^3 + 4u \Rightarrow A'(u) = 5u^4 - 15u^2 + 4$$

$$\text{und } A''(u) = 20u^3 - 30u \Rightarrow \text{Relatives Maximum (} A'(u) = 0 \text{ und } A''(u) < 0 \text{): } 0 = 5u^4 - 15u^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = u^4 -$$

$$3u^2 + 0,8 \Leftrightarrow 0 = z^2 - 3z + 0,8 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{20}} \Rightarrow u_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{20}}} \approx \pm 1,64 \quad \text{und} \quad u_{3/4} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{20}}} \approx \pm 0,54. \text{ Nur } u_3 \approx 0,54 \text{ liegt im gewünschten Bereich! } A''(0,54) \approx -15,4 < 0 \Rightarrow \text{relatives}$$

Maximum (Hochpunkt). Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$, $A(0,54) \approx 1,41$ und $A(1) = 1 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u_3 \approx 0,54$ y-Koordinaten: $f_1(0,54) \approx -0,21$ und $g_1(0,54) \approx -1,56 \Rightarrow$ Eckpunkte: $A(0,54|-0,21)$, $B(-0,54|-0,21)$, $C(-0,54|-1,56)$ und $D(0,54|-1,56)$. (7)

- c) Punkte $A(1 | \frac{1}{2t} - t^2)$ und $B(2 | \frac{8}{t} - 4t^2) \Rightarrow$ Abstand $d(t) = \sqrt{1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2}$ mit $t > 0$.

Ansatz 1:

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, genügt es, das Minimum von $d^2(t) = 1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2$ zu suchen: Ist $d^2(t)$ an der Stelle t_0 minimal, so besitzt auch $d(t)$ dort ein relatives Minimum. $(d^2(t))' = 2(\frac{15}{2t} - 3t^2)(-\frac{15}{2t^2} - 6t) = 0 \Leftrightarrow \frac{15}{2t} - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ mit $d(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) = 1$. ($t > 0!$). Randwerte: Da $d(t)$ für $t \rightarrow 0$

(wegen $\frac{15}{2t}$) und für $t \rightarrow \infty$ (wegen $3t^2$) gegen ∞ strebt, ist an dieser Stelle auch das absolute Minimum.

Ansatz 2:

$$\sqrt{1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2} \text{ erreicht sein absolutes Minimum, wenn } \frac{15}{2t} - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}.$$

Aufgabe 10: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Tangente (24)

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -x^3 + (t-2)x^2 + (2t-1)x + t$. Ihr Schaubild heißt K_t .

- a) Untersuchen Sie K_2 auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 für $-2 \leq x \leq 2$ mit 1 LE = 2 cm. (10)
- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_2 im Punkte $P(0,5|f_2(0,5))$. Zeigen Sie, dass der Tiefpunkt von K_2 auf dieser Tangenten liegt. Q sei ein vom Hochpunkt $H(1|4)$ verschiedener Punkt auf K_2 . Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass die Tangente an K_2 in Q durch H geht. (7)
- c) Zeigen Sie, dass K_t die x-Achse in $A(-1|0)$ berührt. Für welche Werte von t ist A
Hochpunkt
Tiefpunkt
Wendepunkt von K_t ?
- d) Es sei $t \leq 0$. Auf dem Schaubild K_t liegen die Punkte $R(t|0)$ und $S(0|t)$. Der Ursprung $O(0|0)$ und die Punkte R und S bilden Sie Eckpunkte eines Dreieckes mit dem Flächeninhalt $A_1(t)$. Die Koordinatenachsen und K_t begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt $A_2(t)$. Für welchen Wert von t gilt $A_1(t) : A_2(t) = 1 : 3$?

Aufgabe 11: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe (24)

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{t^2}{16}x^4 + \frac{t}{2}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^*_{+}$. Das Schaubild von f_t heißt K_t .

- a) Untersuchen Sie K_3 auf gemeinsame Punkte mit der x -Achse, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_3 für $-3 \leq x \leq 1$ mit 1 LE = 1cm. (10)
- b) Untersuchen Sie K_t auf Extrempunkte und zeigen Sie, dass K_t keinen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Ortskurve des Tiefpunktes von K_t . (8)
- c) Die Senkrechte $x = u$ mit $-\frac{8}{3} \leq u \leq 0$ schneidet K_3 in P und die x -Achse in Q Für welches u ist der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal? (5)