

5.5. Abstrakte Abituraufgaben zu rationalen Funktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Rotationsvolumen (16)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = \frac{2x-t}{x^3}$. Ihre Schaubilder heißen K_t .

- Untersuchen Sie K_t in Abhängigkeit von $t > 0$ auf Asymptoten sowie Achsenschnittpunkte und skizzieren Sie K_2 . (4)
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von K_t in Abhängigkeit von $t > 0$. Für welches t liegt er an der Stelle $x = 3$? (4)
- Bestimmen Sie den Inhalt A_s der Fläche, die von K_2 , der x -Achse und der Senkrechten bei $x = s > 1$ begrenzt werden. Für welches s ist diese Fläche $\frac{1}{4}$ FE groß? Wie verhält sich der Flächeninhalt A_s , wenn s gegen Unendlich strebt? (4)
- Bestimmen Sie das Volumen der Spindel, die durch das durch den im Bereich $1 < x < \infty$ um die x -Achse rotierende Schaubild K_2 gebildet wird. (4)

Lösung

- a) Skizze (1)

$$S_{x1}\left(\frac{t}{2} \mid 0\right), \text{ da NST nur im Zähler} \quad (1)$$

senkrechte Asymptote mit VZW bei $x = 0$, da dreifache NST nur im Nenner (1)

$$\text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-t}{x^3} = 0 \quad (1)$$

- b) $f_t'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{3t}{x^4} = \frac{3t-4x}{x^4} \Rightarrow H\left(\frac{3t}{4} \mid \frac{32}{27t^2}\right)$, da VZW der Ableitung von + nach - (3)

$$\text{Für } t = 4 \text{ liegt der Hochpunkt an der Stelle } x = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3 \quad (1)$$

- c) $A_s = \int_1^s \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx = \left[-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right]_1^s = 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4}$ für $s = 2$ (3)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) = 1 \text{ FE} \quad (1)$$

- d) $V = \pi \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)^2 dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[-\frac{4}{5x^5} + \frac{4}{3x^6} - \frac{4}{7x^7}\right]_1^s = \frac{4}{105} \text{ VE}$ (4)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration (12)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = \frac{4x-t}{x^3}$. Ihre Schaubilder heißen K_t .

- Untersuchen Sie K_t in Abhängigkeit von $t > 0$ auf Asymptoten sowie Achsenschnittpunkte und skizzieren Sie K_4 . (4)
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von K_t in Abhängigkeit von $t > 0$. Für welches t liegt er an der Stelle $x = 3$? (4)
- Bestimmen Sie den Inhalt A_s der Fläche, die von K_4 , der x -Achse und der Senkrechten bei $x = s > 1$ begrenzt werden. Für welches s ist diese Fläche $\frac{1}{2}$ FE groß? Wie verhält sich der Flächeninhalt A_s , wenn s gegen Unendlich strebt? (4)

Lösung

- a) Skizze (1)

$$S_{x1}\left(\frac{t}{4} \mid 0\right), \text{ da NST nur im Zähler} \quad (1)$$

senkrechte Asymptote mit VZW bei $x = 0$, da dreifache NST nur im Nenner (1)

$$\text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x-t}{x^3} = 0 \quad (1)$$

$$b) f_t'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{3t}{x^4} = \frac{3t-8x}{x^4} \Rightarrow H\left(\frac{3t}{8} \mid \frac{64}{3t^2}\right), \text{ da VZW der Ableitung von + nach -} \quad (3)$$

$$\text{Für } t = 8 \text{ liegt der Hochpunkt an der Stelle } x = \frac{3 \cdot 8}{8} = 3 \quad (1)$$

$$c) A_s = \int_1^s \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx = \left[-\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right]_1^s = 2 - \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} = \frac{1}{2} \text{ für } s = 2 \quad (3)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2}\right) = 2 \text{ FE} \quad (1)$$

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Tangente, Integration (7)

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{200tx}{(x^2 + t^2)^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_t .

- Skizzieren Sie K_4 und K_5 in einem Koordinatensystem. (2)
- K_4 und K_5 schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Diese wird durch die Tangente im Hochpunkt von K_5 in Teilflächen zerlegt. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der oberen Teilfläche an der Gesamtfläche. (5)

Lösung

- Skizze (0,5)
- Der Hochpunkt von K_4 ist $H_4(2,89 \mid 2,60)$ und die Tangente durch H_4 schneidet K_5 in $S_1(0,92 \mid 2,60)$ und $S_2(4,69 \mid 2,60)$. K_4 und K_5 schneiden sich in $S_3(0 \mid 0)$ und $S_4(7,76 \mid 1,07)$. Die fragten Flächeninhalte sind also $A_{\text{ges}} \approx \int_0^{7,76} (f_4(x) - f_5(x)) dx \approx 5,62 \text{ FE}$ und $A_{\text{oben}} = \int_{0,92}^{4,69} (f_4(x) - 2,60) dx \approx 3,41 \text{ FE} \approx 60,7 \% \text{ von } A_{\text{ges}}$. (5)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung, Integration, Extremwertaufgabe mit Zylindervolumen (12)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ mit $x \neq 0$. Ihr Schaubild sei K .

- Untersuchen Sie K auf Symmetrie, Schnittpunkt mit der x -Achse und Asymptoten. Zeichnen Sie K und die Asymptoten im Bereich $-4 \leq x \leq 4$. (4)
- Die Geraden $x = 1$ und $x = t$ mit $t > 1$, die x -Achse und die waagrechte Gerade $y = 4$ bilden ein Rechteck. k teilt dieses Rechteck in zwei Teilflächen mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 . Bestimmen Sie t so, dass $A_1 = A_2$. (4)
- $P(u|v)$ sei ein Punkt auf K . Zusammen mit den Punkte $Q(u|4)$, $R(0|4)$ und $S(0|v)$ bildet P ein weiteres Rechteck. Bei der Rotation dieses Rechtecks um die y -Achse entsteht ein Zylinder. Für welchen Wert von u ist die Oberfläche des Zylinders minimal? (4)

Lösung

- Symmetrie zur y -Achse, da $f(-x) = f(x)$ (0,5)
Achsen Schnittpunkte $S_{x1/1}(\pm 1 \mid 0)$ (0,5)
Senkrechte Asymptote ohne VZW $x = 0$, da doppelte NST nur im Nenner (1)
Waagrechte Asymptote $y = 4$, da $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} 4 - \frac{4}{x^2} = 4 - 0 = 4$ (1)
Zeichnung (1)
- Gesamtfläche $A(t) = 4(t-1)$ (0,5)
Teilfläche $A_1(t) = \int_1^t \left(4 - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[4x + \frac{4}{3x}\right]_1^t = 4t + \frac{4}{t} - 8$ (1,5)
 $A_1(t) = \frac{1}{2} A(t) \Leftrightarrow 4t + \frac{4}{t} - 8 = 2t - 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; 2\}$, sinnvoll ist nur $t = 2$ (2)
- Oberfläche $O(u) = 2\pi u^2 + \frac{8\pi}{u}$ mit $u > 0$ und $O'(u) = 4\pi u - \frac{8\pi}{u^2} = 4\pi\left(u - \frac{2}{u^2}\right)$ (3)
 \Rightarrow Minimum für $u = \sqrt[3]{2}$ (1)