5.5. Konkrete Abituraufgaben zu rationalen Funktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung, Modellbildung, Integration (18)
Auf kleine, gleich große Versuchsflächen wird jeweils eine bestimmte Menge Aussaat ausgebracht. Nach der Ernte bestimmt man den Ertrag. Bei fünf Flächen kommt man zu folgenden Ergebnissen:

Aussaat in kg	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Ertrag in kg	47,3	72,2	85,4	92,2	95,9

a) Ein Rechenmodell M_1 soll den Zusammenhang zwischen Aussaat und Ertrag rechnerisch beschreiben. Man entwirft folgende Zuordnung:

f: Aussaat x → Ertrag f(x) mit $f(x) = \dfrac{120x}{x+1,2}$

Stellen Sie den tatsächlichen und den mit dem Modell M_1 ermittelten Ertrag in Abhängigkeit von der Aussaat in einem Diagramm dar. (2)
Berechnen Sie jeweils die prozentuale Abweichung. (1)
Wie entwickelt sich der Ertrag im Modell M_1, wenn immer mehr ausgesät wird? (1)
Bewerten Sie Ihr Ergebnis. (1)

b) Ein Modell M_2 wird durch die Funktion p beschrieben mit
$p(x) = 0,88 \cdot x^3 - 11,2 \cdot x^2 + 52,2 \cdot x + 5,4$.
Berechnen Sie damit einen Näherungswert für die Menge der Aussaat, bei welcher die Zuwachsrate des Ertrages am geringsten ist. (3)
Die Abweichungen von den Messwerten sind beim Modell M_2 gering. Dennoch hat das Modell Schwächen; erläutern Sie diese. (3)

c) Eine Fläche von 1 ha bringt einen Weizenertrag von ca. 7000 kg. Der Verkaufspreis von 1 kg erntefrischem Weizen liegt bei 12 Cent. Der Ertrag von 3 ha soll verkauft werden. Welchen Erlös erzielt man beim sofortigen Verkauf? (3)
Höhere Einnahmen erzielt man, wenn man den Weizen nach der Ernte trocknet. Allerdings verliert der Weizen beim Trocknen an Gewicht. Erfahrungsgemäß kann man für einen gewissen Zeitraum von folgender Überschlagsrechnung ausgehen: 1 kg Weizen verliert am Tag etwa 7 g Gewicht, dafür steigt der Preis pro Kilogramm täglich um 0,1 Cent. Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Einnahmen am größten sind. Wie groß sind diese? (3)

Lösung
Teil a) (6)

Tabelle mit prozentualen Abweichungen (1)

Aussaat in kg	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Ertrag in kg	47,3	72,2	85,4	92,2	95,9
Modell M_1	54,5	75	85,7	92,3	96,8
Abweichung	15,2 %	3,9 %	0,3 %	0,1 %	0,9 %

Der Ertrag im Modell M_1 nähert sich dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 120$ bzw. einer waagrechten Asymptote bei y = 120. (1)

Für hohe Aussaatmengen stimmen Modell und Wirklichkeit gut überein. (0,5)

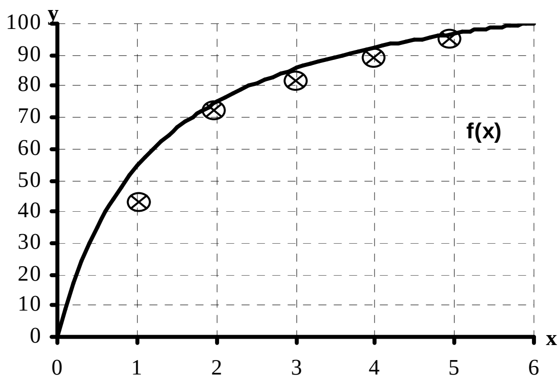

Diagramm (1)

Erklärung: Auch der tatsächliche Ertrag nähert sich einem gewissen (Wachstums-) Grenze, die durch das begrenzte Angebot an Sonne, Wasser und Nährstoffen auf der gegebenen Anbaufläche zu erklären ist. (1)

Für kleine Aussaatmengen liegen die tatsächlichen Ertragswerte deutlich unter den berechneten Werten. (0,5)

Erklärung: Einzelne oder verstreute Getreidepflanzen können das auf der gegebenen Fläche zur Verfügung stehende Angebot an Sonne, Wasser und Nährstoffen nicht vollständig nutzen und sind Wind und Regen (Erosion!) stärker ausgesetzt. Damit ist zu erklären, dass der tatsächliche Ertrag für sehr kleine Aussaatmengen nur langsam ansteigt. (1)

Teil b) (6)
Gesucht ist die Aussaatmenge x, für die die Zuwachsrate = Ableitung $p'(x) = 2{,}64\,x^2 - 22{,}4\,x + 52{,}2$ minimal ist. (2)
Mit GTR oder mit $p''(x) = 5{,}28\,x - 22{,}4$ erhält man der Wert x = 4,24 kg (1)
Das Modell M_2 wird durch eine Parabel dritten Gerades beschrieben, die für kleine Aussaatmengen realistische, für größere Aussaatmengen aber zunehmend unrealistische Werte liefert. (1)
Die Parabel erreicht bei x = 4,24 kg einen Wendepunkt und steigt dann wieder steil an, was der natürlichen Wachstumsgrenze infolge des begrenzten Angebotes an Nährstoffen widerspricht. (2)

Teil c) (6)
c) Erlös beim sofortigen Verkauf E(0) = 0,12 €/kg·7000 kg/ha·3 ha = 2520 € (1)
Erlös nach x Tagen $E(x) = (0{,}12 + 0{,}001x)(21\,000 - 147x) = -0{,}147x^2 + 3{,}36x + 2520$ (2)
Das Maximum ist bei x = 11,4 Tagen erreicht (GTR oder Scheitelpunktform) (2)
E(70,8) = 2539,2 € (1)

Aufgabe 2: Funktionsanpassung, Kurvenuntersuchung, Integration (13)
Ein Verlag bringt ein neues Buch auf den Markt und erzielt im ersten Monat (t = 0) einen Absatz von 5000 Exemplaren. Im 10. Monat wird der größte Absatz von 20 000 Exemplaren erreicht. Erfahrungsgemäß genügen die Absatzzahlen einer Funktion der Form $f(t) = \frac{a}{b+(c-t)^2}$ mit t in Monaten.

a) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c für die gegebenen Absatzzahlen (Ergebnis $f(t) = \frac{540000}{27+(9-t)^2}$) (4)
b) Ermitteln Sie, wie viele Bücher nach dieser Funktion innerhalb eines Jahres abgesetzt werden. (3)
c) In welchem Monat unterschreitet nach diesem Modell die monatliche Absatzzahl erstmals die Rentabilitätsgrenze von 200 Exemplaren? (2)
d) In welchem Monat ist nach diesem Modell die stärkste Abnahme des Absatzes zu erwarten? (3)
e) Wieviele Bücher können bis zum Erreichen der Rentabilitätsgrenze insgesamt abgesetzt werden? (1)

Lösung
a) 3 Bedingungen für 3 Unbekannte:
$f'(9) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a(9-c)}{(b+(9-c)^2)^2} = 0 \Leftrightarrow c = 9$ (1,5)
$f(9) = 20\,000 \Rightarrow$ mit c = 9 eingesetzt $\frac{a}{b} = 20\,000$ (0,5)
$f(0) = 5000 \Rightarrow$ mit c = 9 eingesetzt $\frac{a}{b+81} = 5000$ (0,5)
Mit Einsetzen oder Gleichsetzen erhält man b = 27 und a = 540 000 (1)

b) $\sum_{t=0}^{11} f(t) = 157\,963{,}65$ mit SUM(SEQ(Y1(X),X,0,11)) (3)
oder $\int_0^{12} f(t)dt = 163241{,}94$ mit CALC 7: Sf(x)dx) als Näherung (2)

c) f(t) = 200 für t = 60,70 $\Rightarrow$ Nach 61,7 Monaten (CALC 5:intersect) (2)
d) Stärkste Abnahme am WP von f(t) = TP von f'(t) bei t = 12,00 (3)
e) $\sum_{t=0}^{60} f(t) = 264\,050{,}77$ mit SUM(SEQ(Y1(X),X,0,60)) (1)
oder $\int_0^{60,7} f(t)dt = 261\,659{,}99$ mit CALC 7: Sf(x)dx) als Näherung (1)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung, Tangenten, Integration (13)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.

a) Zeichnen Sie K. (2)

Untersuchen Sie das Verhalten von K für $|x| \to \infty$ (1)
Weisen Sie nach, dass K genau zwei Wendepunkte besitzt. (4)

Nun stellt K für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines 500 m langen Kanals dar (x in Meter, f(x) in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe y = 0. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal 2,25 m.

b) Wie viele Kubikmeter Wasser sind in dem Kanal, wenn er ganz gefüllt ist? (2)
Zu wie viel Prozent ist der Kanal bei einem Pegelstand von 1,00 m gefüllt? (3)

c) An Land steht eine Person mit der Augenhöhe 1,50m. In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie in dem leeren Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann? (6)

Lösung:

a) Zeichnung (2)

$f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16} = 1 - \frac{52}{x^2+16}$ strebt für $x \to \pm\infty$ gegen den ganzrationalen Hauptteil y = 1 (1)

$f'(x) = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$ und $f''(x) = \frac{104(-3x^2+16)}{(x^2+16)^3}$ (2)

hat genau zwei VZW bei $x_{1/2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$. K besitzt genau an diesen Stellen Wendepunkte. (2)

b) Querschnittsfläche bei 100 % Füllung $A = \int_{-6}^{6} \frac{x^2-36}{x^2+16}dx \approx 13{,}55264\ m^2$ (GTR) (1)

$\Rightarrow$ Volumen $V = l \cdot A = 6776{,}32\ m^3$ (1)

Pegelstand 1,00 m $\Leftrightarrow \frac{x^2-36}{x^2+16} = -1{,}25 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{8}{3}$ (Gleichsetzen oder GTR) (1)

$\Rightarrow A = -\int_{-8/3}^{8/3} \frac{x^2-36}{x^2+16}dx - 1{,}25 \cdot \frac{16}{3} = 3{,}29\ m^2$ (GTR) entsprechen 24,3 % (2)

a) Tangente durch $T(0|-2{,}25)$ an K: $\frac{\frac{x^2-36}{x^2+16}+2{,}25}{x-0} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$ (1)

$\Leftrightarrow 3{,}25x^2(x^2+16) = 104x^2 \Leftrightarrow x^2 + 16 = 32 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$ (1)

$\Rightarrow t_{1/2}(x) = \pm\, 0{,}40625 - 2{,}25.$ (2)
(*Die Tangente lässt sich auch durch Probieren mit dem GTR über DRAW 5:tangent exakt bestimmen!)*

Augenhöhe $1{,}50 = t(x) \Leftrightarrow 3{,}75 = 0{,}40625 \Leftrightarrow x = 9{,}23$ (1)

$\Rightarrow$ Die Person darf höchstens 3,23 m vom Kanalrand entfernt stehen. (1)

Aufgabe 4. Kurvenuntersuchung, Verschiebung, Optimierungsaufgabe, Integration (18)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2000}{(x+50)^2}$ mit $x \neq -50$. Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Asymptoten. Zeichnen Sie K. (3)

Wie geht das Schaubild von K aus dem Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$ mit $x \neq 0$ hervor? (1)

b) Eine Parallele zur x-Achse schneidet K in den Punkten P und Q. Die Strecke PQ, die Parallelen zur y-Achse durch P bzw. Q und die x-Achse begrenzen ein Rechteck. Bestimmen Sie den Punkt P so, dass der Umfang des Rechtecks minimal wird. (5)

c) Eine weitere Parallele zur x-Achse schneidet K in den Punkten R und S und die y-Achse im Punkt T. Bestimmen Sie S so, dass die Strecke RT von S halbiert wird. (5)

In einer Badewanne mit einem Fassungsvermögen von 200 Litern befinden sich 50 Liter Wasser mit der Temperatur 20 °C. Lässt man heißes Wasser von 60 °C zufließen, so kann die Änderungsrate der Temperatur des Wannenwassers durch $f(x) = \frac{2000}{(x+50)^2}$ für $0 \leq x \leq 150$ beschrieben werden. Dabei gibt x die zugeflossene Wassermenge in Liter und f(x) die Temperaturänderungsrate in Grad pro Liter an.

a) Die Temperatur des Wassers in der Wanne kann durch einen Term T(x) beschrieben werden (x gibt dabei die zugeflossene Wassermenge in Liter, T(x) die Temperatur des Wannenwassers in °C an).
Bestimmen Sie einen solchen Term T(x). (2)
Könnte man die Temperatur des Wannenwassers auf 45 °C erhöhen, bevor es überläuft? (4)

Lösung

a) Waagrechte Asymptote $y = 0$, da $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (0,5)
Senkrechte Asymptote ohne VZW $x = -50$, da doppelte Nennernullstelle (0,5)
Zeichnung (2)
Verschiebung um $x_0 = -50$ in x-Richtung und Streckung um den Faktor 2000 in y-Richtung (1)

b) Man betrachtet das Problem zunächst für $h(x) = \frac{2000}{x^2}$ und verschiebt anschließend alles um $x_0 = -50$ in x-Richtung.

Die Gerade $y = t$ schneidet h, wenn $\frac{2000}{x^2} = t \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2000}{t}}$. (0,5)

Der Umfang ist also $U(t) = 2\cdot b(t) + 2\cdot h(t) = 4\sqrt{\frac{2000}{t}} + 2t$ mit $U'(t) = 2 - 2\sqrt{\frac{2000}{t^3}}$ und $t > 0$. (3)

Er hat in diesem Bereich ein relatives und absolutes Minimum (VZW von − nach +) an der Stelle $t = \sqrt[3]{2000} = 10\sqrt[3]{2}$. (0,5)

Die zugehörigen x-Werte sind $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2000}{t}} = \pm\sqrt[3]{2000^2} = \pm 100\sqrt[3]{4}$. (0,5)

Durch Verschiebung um $x_0 = -50$ in x-Richtung erhält man die gesuchten Koordinaten des Punktes $P(-50 - 100\sqrt[3]{4} \,|\, 10\sqrt[3]{2})$ (0,5)

c) RT wird von S halbiert, wenn $\overline{RS} = \overline{ST} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{2000}{t}} = 50 - \sqrt{\frac{2000}{t}} \Leftrightarrow t = \frac{36}{5}$ (5)

d) $T(x) = 20 + \int_0^x f(t)dt = 20 - \frac{2000}{x+50} + \frac{2000}{50} = 60 - \frac{2000}{x+50}$ in °C für x Liter (3)

$T(x) = 45 \Leftrightarrow \frac{2000}{x+50} = 15 \Leftrightarrow x = \frac{400}{3} - 50 = 83{,}3$ Liter zugeflossene Wassermenge bzw. 133,3 Liter insgesamt. Die Wanne läuft also nicht über. (2)

Aufgabe 5: Funktionsanpassung, Optimierungsaufgabe, Integration (18)

a) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{120(x-120)^2}{(x-120)^2+7200}$ mit $0 \le x \le 130$. Ihr Schaubild sei K.

Skizzieren Sie K. (2)

Das Schaubild C einer weiteren Funktion g mit $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ enthält die Punkte $P_l(0|95)$, $P_2(10|95)$ und $P_3(20|92)$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c. (2)
Skizzieren Sie C im ersten Feld des vorhandenen Koordinatensystems. (1)
(Teilergebnis: $g(x) = -0{,}015x^2 + 0{,}15x + 95$)

Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang. Das Schaubild K beschreibt das Profil des Aufsprunghangs, die Kurve C die Flugbahn eines Skispringers. Der Absprung erfolgt bei x = 0. (Alle Angaben in Meter)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt. (2)
Wie groß ist die maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Aufsprunghang? (3)

c) Der Wendepunkt W(71|40) von K entspricht dem „kritischen Punkt" des Aufsprunghangs.
Mögliche Flugbahnen des Skispringers werden nun durch Schaubilder der Funktionen g_k mit $g_k(x) = -0{,}015x^2 + kx + 95$ beschrieben. Welchen Wert darf der Parameter k höchstens annehmen, damit der Springer mit dieser Flugbahn nicht hinter dem kritischen Punkt landet? (4)

d) Beim Umbau dieser Schanze soll das Profil des Aufsprunghangs verändert werden. Er soll nach dem Umbau durch die Funktion h mit $h(x) = 0{,}0001\cdot(1{,}25x^3 - 225\,x^2 + 2150x + 800\,000)$ mit $0 \le x \le 130$ beschrieben werden. Muss zur Realisierung des neuen Profils insgesamt Erde weggefahren oder angeliefert werden, wenn angenommen wird, dass der Aufsprunghang überall gleich breit ist? (4)

Lösung

a) Skizzen (3)
Einsetzen der Punkte liefert das LGS
$$\begin{aligned} c &= 95 \\ 100a + 10\,b + c &= 95 \\ 400a + 20\,b + c &= 92 \end{aligned}$$ (1)
mit der Lösung $a = -0{,}015$; $b = 0{,}15$ und $c = 95$ (GTR) (1)

b) Der Skispringer setzt im Schnittpunkt S(60|50) (GTR) von K und C im ersten Feld auf (2)
Er hat die maximale vertikale Höhe $h(x) = g(x) - f(x)$ bei $x \approx 26{,}1$ mit $h(26{,}1) \approx 12{,}6$ (GTR) (3)

c) Damit der Springer nicht hinter dem kritischen Punkt landet, muss gelten $g_k(71) \le 40$ (2)
$-0{,}051\cdot 71^2 + k\cdot 71 + 95 \le 40$ liefert $k \le \dfrac{20{,}615}{71} \approx 0{,}29$ (2)

Die Flächenbilanz der Profile $\int_0^{130} (f(x) - h(x))dx \approx 13{,}6$ ist positiv (3)

Daher hat das alte Profil f eine größere Querschnittsfläche als das neue Profil. Es muss also Erde weggefahren werden. (2)

Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung, Tangente, Rotationskörper (18)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{40x}{x^2+16}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.

a) Skizzieren Sie K. (2)
Untersuchen Sie K auf Asymptoten. (1)
Weisen Sie nach, dass K genau einen Hochpunkt besitzt. (2)

Das Schaubild K, die x-Achse und die Geraden x = 2 und x = 30 schließen eine Fläche ein. Diese rotiert um die x-Achse. Der dabei entstehende Drehkörper stellt die Designstudie einer Flasche dar (Koordinatenangaben in cm).

b) Solche Flaschen sollen später gefüllt und in einem gepolsterten, zylinderförmigen Karton verkauft werden. Dabei steht eine Flasche so in einem 30 cm hohen Zylinder, dass sie an ihrer breitesten Stelle 1 cm Abstand vom Zylindermantel hat und dass der Flaschenboden 1 cm Abstand vom Zylinderboden hat. Der die Flasche umgebende Hohlraum ist mit Holzwolle gefüllt. Bestimmen Sie das Volumen des Hohlraumes. (6)

c) Aus Gründen des Marketings soll eine gefüllte Flasche jetzt in einem kegelförmigen Karton ohne Holzwolle verkauft werden. Bestimmen Sie den Öffnungswinkel desjenigen Kegels, der die Flasche möglichst eng umschließt. (7)

Lösung

a) Skizze (2)
Waagrechte Asymptote y =0, denn $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ (1)
$f'(x) = \dfrac{-40x^2+640}{(x^2+16)^2} = \dfrac{-40(x^2-16)}{(x^2+16)^2}$ hat genau einen VZW von + nach − bei x = 4 (2)
(Anstelle des VZW kann auch mit der Punktsymmetrie am Ursprung argumentiert werden.)

b) Die breiteste Stelle befindet sich am Hochpunkt H(4|5) (1)
Der Zylinder hat also den Radius r = 6 cm und das Volumen $V_Z = \pi r^2 \cdot h \approx 2356{,}2\ \text{cm}^3$ (1)
Die Flasche hat das Volumen $V_F = \pi \int_2^{30} (f(x))^2\,dx = 781{,}4\ \text{cm}^3$ (2)
Der Hohlraum hat das Volumen $V_Z - V_F = 1574{,}8\ \text{cm}^3$. (1)

c) Die Tangente durch P(30|f(30)) berührt K, wenn $\dfrac{f(x)-f(30)}{x-30} = f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{\frac{40x}{x^2+16} - \frac{1200}{916}}{x-30} = \dfrac{-40(x^2-16)}{(x^2+16)^2}$.
Mit dem GTR erhält man die Lösung $x \approx 4{,}57$. Die Steigung ist $f'(4{,}57) \approx -1{,}434$ und der Öffnungswinkel ist $\alpha = \arctan(-1{,}434) = 8{,}1\,°$ (7)

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung, Integration, Verschiebung, Symmetrie (18)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2+16}{2x+2}$. Ihr Schaubild ist K.

a) Untersuchen Sie K auf Asymptoten und skizzieren Sie K (4)

b) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ und K schließen im Intervall [0; t] mit t > 0 eine Fläche mit dem Inhalt A(t) ein. Für welchen Wert t_0 gilt $A(t_0) = 10$? Bestimmen Sie denjenigen Punkt von K, der den geringsten Abstand vom Ursprung besitzt. (5)

c) Die Funktion g hat die Gleichung $g(x) = \dfrac{x^2+17}{2x}$. Ihr Schaubild ist K*. Zeigen Sie, dass man K aus K* durch Verschiebung um eine Einheit nach links und eine Einheit nach unten erhält. Untersuchen Sie K* auf Symmetrie. Schließen Sie daraus auf die Symmetrieeigenschaften von K. (4)

d) Eine zylinderförmige Getränkedose ist 16 cm hoch und steht auf ihrer Bodenfläche. Der Term f(x) beschreibt für $0 \le x \le 16$ die Höhe des Schwerpunktes der Getränkedose in Abhängigkeit von der Höhe x der Dosenflüssigkeit. Dabei sind x und f(x) in cm angegeben. Wie hoch steht die Flüssigkeit in der Dose, wenn sich der Schwerpunkt 4 cm über der Bodenfläche befindet? Wie viel Prozent muss aus der anfangs vollständig gefüllten Dose abgetrunken werden, damit der Schwerpunkt möglichst tief liegt? (5)

Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{17}{2x+2}$ (1)

$\Rightarrow$ Schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{17}{2x+2} = 0$ (1)

$\Rightarrow$ Senkrechte Asymptote mit VZW bei $x = -1$, da einfache NST nur im Nenner (1)

Schaubild (1)

b) $A(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))dx = \int_0^t \frac{17}{2x+2}dx = \left[\frac{17}{2}\ln(x+1)\right]_0^t = \frac{17}{2}\ln(t+1)$ (2)

$A(t_0) = 10 \Leftrightarrow t_0 = e^{\frac{20}{17}} - 1 \approx 2{,}24$ (1)

Der Abstand des Punktes $P(u \mid f(u))$ vom Ursprung ist $d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u))^2}$ (1)

Er wird minimal für $u \approx 1{,}85$ (GTR) mit $f(1{,}85) = 3{,}41$ (GTR)

$\Rightarrow P(1{,}85 \mid 3{,}41)$ hat minimalen Abstand (1)

c) K* entsteht aus K durch Verschiebung um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = -1$ nach unten, da $g(x - x_0) + y_0 = g(x + 1) - 1 = \frac{(x+1)^2 + 17}{2(x+1)} - 1 = \frac{x^2 + 16}{2x+2}$. (2)

K* ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da $g(-x) = g(x)$ (1)

K ist punktsymmetrisch zu $S(-1 \mid -1)$, denn es entsteht aus K durch Verschiebung um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = -1$ nach unten. (1)

d) $f(x) = 4$ gilt für $x_1 \approx 1{,}17$ und $x_2 \approx 6{,}83$ (GTR) (2)

f besitzt an der Stelle $x \approx 3{,}12$ ein Minimum (GTR). (2)

Der Anteil der abgetrunkenen Flüssigkeit ist dann $\frac{16\text{ cm} - 3{,}1\text{ cm}}{16\text{ cm}} \approx 81\ \%$ (1)