5.5. Prüfungsaufgaben zur Integralrechnung

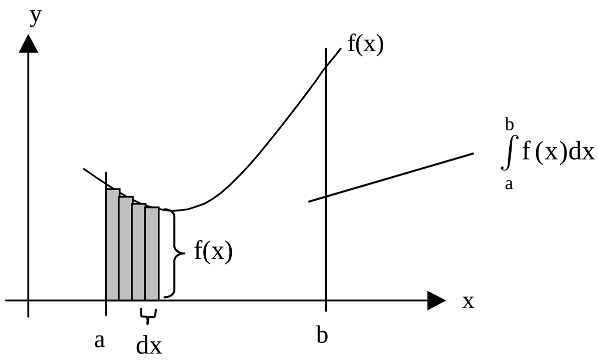
Aufgabe 1: Begriffe zur Integralrechnung (4)
Erklären Sie die folgenden Begriffe: Änderungsrate, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion.

Lösung
Die **Änderungsrate** an der Stelle x_0 ist gleich der 1. Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.

Das **Integral** $\int_a^b f(x)dx$ = orientierter Inhalt der Fläche, die durch die x-Achse, das Schaubild von f, die Senkrechte x = a und die Senkrechte x = b begrenzt wird.

Die **Integralfunktion** $I_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$ ist das Integral als Funktion in Abhängigkeit von der oberen Grenze x_0

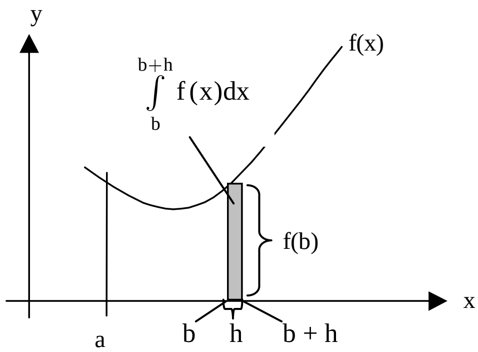
Die **Stammfunktion** $F_c(x_0)$ ist eine Funktion, deren Ableitung gleich $f(x_0)$ ist: $F_c'(x_0) = f(x_0)$



Aufgabe 2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: (4)
Erläutern und begründen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit Hilfe der folgenden Begriffe: Änderungsrate, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion.

Lösung
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Das Integral von f über x zwischen a und b ist gleich der Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an den Stellen a und b: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Begründung: Die Änderungsrate der Integralfunktion ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0: $\left(\int_a^{x_0} f(x)dx\right)' = (I_a(x_0))' = f(x_0) \Rightarrow$ Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion von f: $I_a(x_0) = F_c(x_0) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = I_a(b) = I_a(b) - I_a(a) = F_c(b) - F_c(a)$



Aufgabe 3: Integralfunktion (10)

Gegeben ist die Integralfunktion I mit $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ und $f(t) = t^2 - 1$.

a) Untersuchen Sie I auf Nullstellen sowie Extrem- und Wendestellen. (7)
b) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem die Schaubilder von I und f. (3)

Lösung

a) $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (t^2 - 1)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}$ (2)

Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. (GTR oder pq-Formel) (1)

Extremstellen bei $x_3 = -1$ und $x_4 = 1$, da VZW von $I'(x) = f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ (2)

Wendestellen bei $x_5 = 0$, da VZW von $I''(x) = f'(x) = 2x$ (2)

b) Skizzen von f mit Beschriftung (GTR) (1)

Skizzen von I mit Beschriftung (GTR) (2)

Aufgabe 4: Stammfunktionen
Bestimme alle Stammfunktionen für die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\qquad F_c(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 - 5x^3 - 3x$ $\qquad F_c(x) = x^3 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = ax^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Q}$ $\qquad F_c(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^{3n}$ $\qquad F_c(x) = \frac{1}{3n}x^{3n+1} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Q}$ $\qquad F_c(x) = \frac{a}{n}x^n + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = 2x^{-3}$ $\qquad F_c(x) = -x^{-2} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ $\qquad F_c(x) = -\frac{3}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

h) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 3x - 4$ $\qquad F_c(x) = -\frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = 3\sqrt{x}$ $\qquad F_c(x) = 2x\sqrt{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

j) $f(x) = x\sqrt{x}$ $\qquad F_c(x) = 0{,}4\, x^2 \sqrt{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

k) $f(x) = 3\sqrt{x} + 4x - 3$ $\qquad F_c(x) = 2x\sqrt{x} + 2x^2 - 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

l) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad F_c(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

m) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{\frac{3x}{4}}$ $\qquad F_c(x) = -\cos(x) + x\sqrt{\frac{x}{3}} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

n) $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ $\qquad F_c(x) = 8\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

o) $f(u) = 6u + 4t$ $\qquad F_c(u) = 3u^2 + 4tu + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

p) $f(t) = 6u + 4t$ $\qquad F_c(t) = 6ut + 2t^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

q) $f(t) = 2x^3 + 2t^2x^2$ $\qquad F_c(x) = 2x^3t + \frac{2}{3}x^2t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: Stammfunktionen mit gegebenem Anfangswert
Gib zu der Funktion f zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 an, für die $F_1(0) = 0$ und $F_2(0) = 2$ gilt.

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ $\qquad F_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ $\qquad F_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2$

b) $f(x) = 2\sin(x)$ $\qquad F_1(x) = -2\cos(x) + 2$ $\qquad F_2(x) = -2\cos(x) + 4$

Aufgabe 6: Stammfunktionen mit gegebenem Funktionswert
Gib zu der Funktion f eine Stammfunktion F an, für die $F(1) = 2$ gilt.

a) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 5\sqrt{x^3}$ $\qquad F(x) = -\frac{3}{x} + 2\sqrt{x^5} + 3$

b) $f(x) = \frac{8}{x^3} + 3\sqrt{x}$ $\qquad F(x) = -\frac{4}{x^2} + 2\sqrt{x^3} + 4$

Aufgabe 7: Integration (2)
Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_1^4 \left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^4 = 18$

b) $\int_1^3 \left(x^3-1\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_1^3 = 18$

c) $\int_1^3 \left(3x^3-4\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^4-4x\right]_1^3 = 60 - 8 = 52$

d) $\int_1^e \left(\frac{4}{x}-5\right)dx = \left[4\ln(x)-5x\right]_1^e = 9 - 5e$

e) $\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)+\cos(x)\right)dx = \left[-\cos(x)+\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = 1 + 1 = 2$

f) $\int_0^{\pi} \left(\sin(x)-\cos(x)\right)dx = \left[-\cos(x)-\sin(x)\right]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$

g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin(x)-\frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx = \left[-\cos(x)+\tan(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} - 2$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos(x))dx = \left[2x-\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 1.$ **(N 2009)** (2)

Aufgabe 8: Integralgleichungen
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $\int_0^x \left(2t-1\right)dt = 2 \Leftrightarrow \left[t^2-t\right]_0^x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow L = \{1;-2\}.$

b) $\int_0^x \left(3t^2-2\right)dt = 4 \Leftrightarrow \left[t^3-2t\right]_0^x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 4 \Rightarrow L = \{2\}.$

c) $\int_0^x \left(3t^2-2t\right)dt = 4 \Leftrightarrow \left[t^3-t^2\right]_0^x = 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Rightarrow L = \{2\}.$

Aufgabe 9a: Flächen zwischen zwei Schaubildern (16)
Untersuche die Funktionen f und g auf Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte sowie gemeinsame Punkte. Zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Bestimme den Inhalt der Fläche, die durch die Graphen von f und g eingeschlossen wird.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 6x + 6$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 6$

Lösungen:

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2 \Rightarrow S_f(2|2)$, $S_{fy}(0|-2)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (4)

$g(x) = (x-3)^2 - 3 \Rightarrow S_g(3|-3)$, $S_{gy}(0|6)$ und $S_{gx1/2}(3 \pm \sqrt{3}\ |0)$ (4)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|1)$, $S_{fg2}(4|-2)$. (4)

$A = \int_1^4 (f(x)-g(x))dx = \int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 9$ FE (4)

b) $f(x) = (x-2)^2 - 2 \Rightarrow S_f(2|-2)$, $S_{fy}(0|2)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (4)

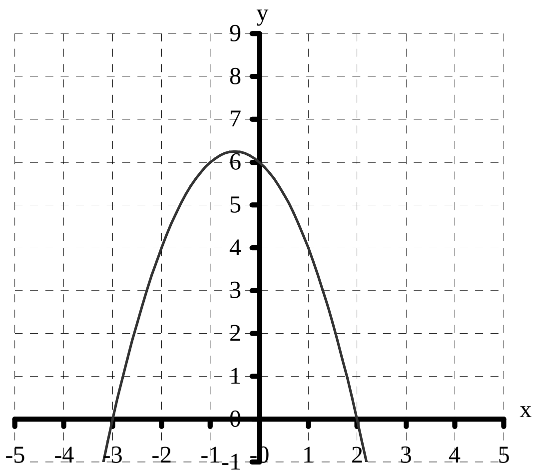
$g(x) = -(x-3)^2 + 3 \Rightarrow S_g(3|3)$, $S_{gy}(0|-6)$ und $S_{gx1/2}(3 \pm \sqrt{3}\ |0)$ (4)

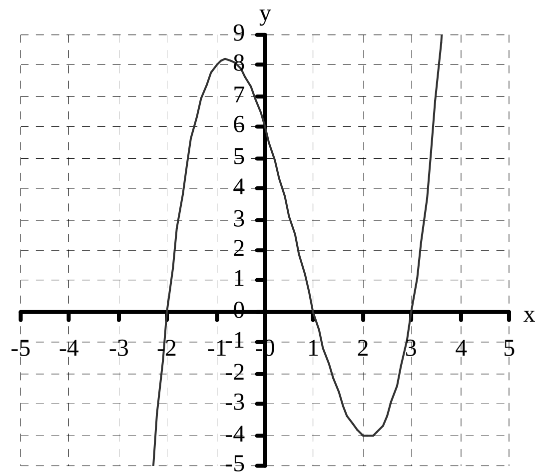
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|-1)$, $S_{fg2}(4|2)$. (4)

$A = \int_1^4 (g(x)-f(x))dx = \int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 9$ FE (4)

Aufgabe 10: Bestimmung einer Funktionsgleichung und Integration

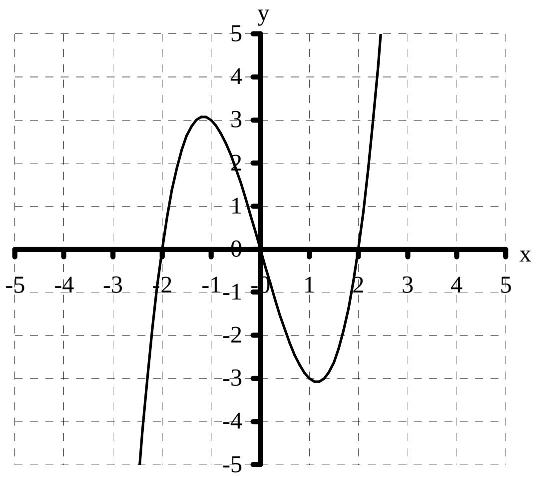
Bestimme die Funktionsgleichung und den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild und der x-Achse eingeschlossen wird:

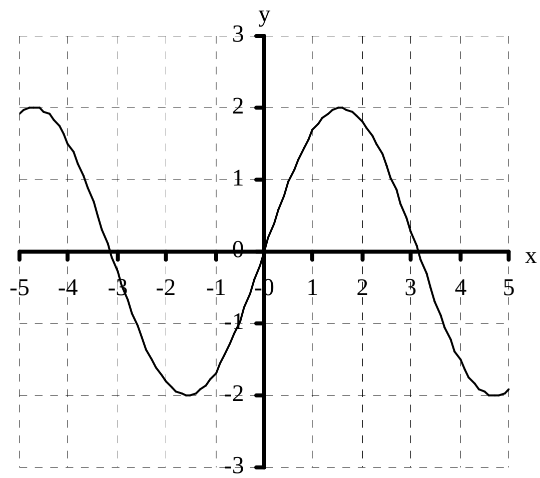




a) ganzrationale Funktion 2. Grades

b) ganzrationale Funktion 3. Grades





c) ganzrationale Funktion 3. Grades

d) trigonometrische Funktion

Lösungen

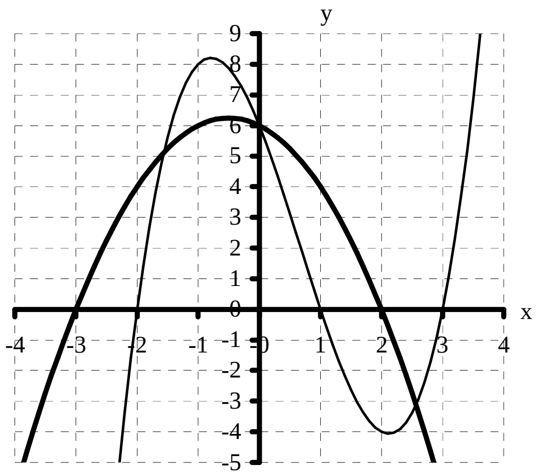
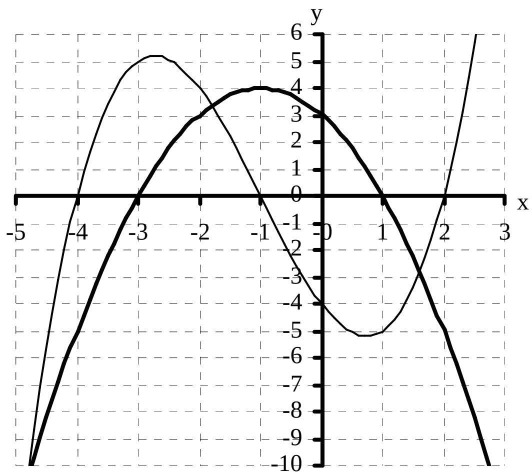
a) $f(x) = -(x - 2)(x + 3) = -x^2 - x + 6$ mit $\int_{-3}^{2}(-x^2 - x + 6)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2} = \frac{35}{3} + \frac{5}{2} + 30 = 44\frac{1}{6}$

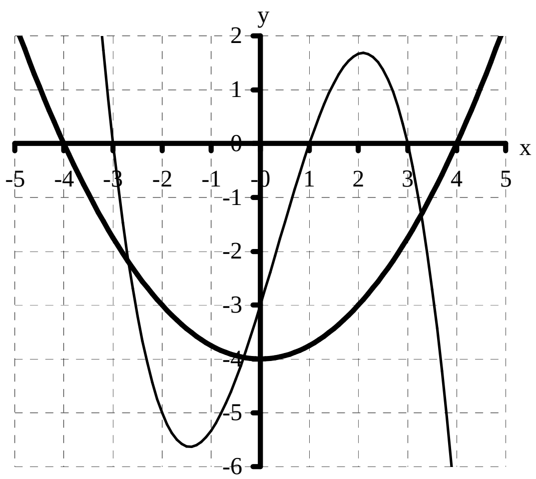
b) $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mit $\int_{-2}^{1}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{1} =$ $-\frac{15}{4} - 6 + \frac{15}{2} + 18 = 15\frac{3}{4}$ und $\int_{1}^{3}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{3} = 20 - \frac{52}{3} - 20 +$ $12 = -5\frac{1}{3} \Rightarrow$ gesamter Flächeninhalt $A = 15\frac{3}{4} + 5\frac{1}{3} = 21\frac{1}{12}$ FE

c) $f(x) = (x - 2)x(x + 2) = x^3 - 4x$ mit $\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} = 4 - 8 = -4 \Rightarrow$ gesamter Flächeninhalt $A = 4 + 4 = 8$ FE wegen Achsensymmetrie zur y-Achse.

d) $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ mit $\int_{0}^{\pi}2\sin(x)dx = \left[-2\cos(x)\right]_{0}^{\pi} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow$ gesamter Flächeninhalt $A = 4 + 4 = 8$ FE wegen Achsensymmetrie zur y-Achse.

Aufgabe 11: Bestimmung einer Funktionsgleichung und Integration (6)
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden ganzrationalen Funktionen sowie den Inhalt der von ihren Schaubildern eingeschlossenen Flächen. Geben Sie alle Maßzahlen auf zwei Nachkommastellen genau an.



Lösungen

a) $f(x) = -(x + 3)(x - 2)$ und $g(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ (2)

$A \approx \int_{-1,56}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{2,56} (f(x) - g(x))dx \approx 2,12 + 7,96 = 10,08$ FE (4)

b) $f(x) = -(x + 3)(x - 1)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x + 1)(x - 2)$ (2)

$A \approx \int_{-4,81}^{-1,80} (g(x) - f(x))dx + \int_{-1,80}^{1,61} (f(x) - g(x))dx \approx 11,16 + 15,68 = 26,84$ FE (4)

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 4)(x - 4)$ und $g(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 1)(x - 3)$ (2)

$A \approx \int_{-2,69}^{-0,34} (f(x) - g(x))dx + \int_{-0,34}^{3,28} (g(x) - f(x))dx \approx 3,43 + 10,92 = 14,35$ FE (4)