5.5. Prüfungsaufgaben zur Integralrechnung

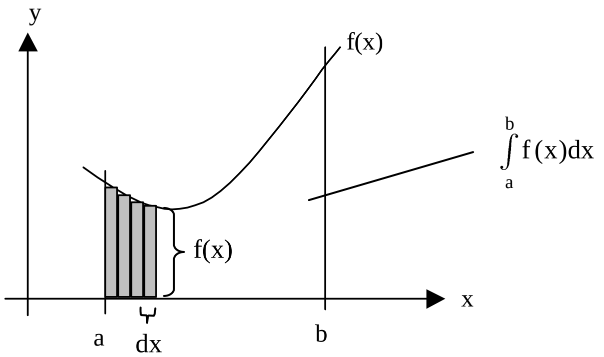
Aufgabe 1: Begriffe zur Integralrechnung (4)
Erklären Sie die folgenden Begriffe: Änderungsrate, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion.

Lösung
Die **Änderungsrate** an der Stelle x_0 ist gleich der 1. Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.

Das **Integral** $\int_a^b f(x)dx$ = orientierter Inhalt der Fläche, die durch die x-Achse, das Schaubild von f, die Senkrechte x = a und die Senkrechte x = b begrenzt wird.

Die **Integralfunktion** $\mathbf{I}_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$ ist das Integral als Funktion in Abhängigkeit von der oberen Grenze x_0

Die **Stammfunktion** $F_c(x_0)$ ist eine Funktion, deren Ableitung gleich $f(x_0)$ ist: $F_c'(x_0) = f(x_0)$



Aufgabe 2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: (4)
Erläutern und begründen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit Hilfe der folgenden Begriffe: Änderungsrate, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion.

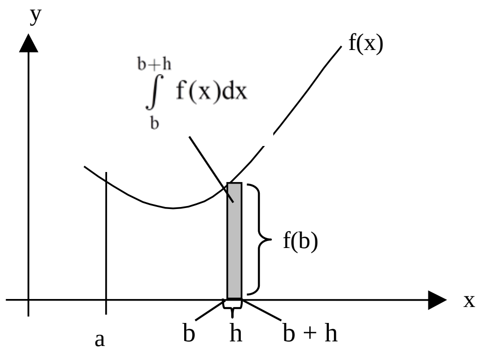
Lösung
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Das Integral von f über x zwischen a und b ist gleich der Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an den Stellen a und b:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Begründung: Die Änderungsrate der Integralfunktion ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0: $\left(\int_a^{x_0} f(x)dx\right)' = (I_a(x_0))' = f(x_0)$

⇒ Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion von f: $I_a(x_0) = F_c(x_0)$

⇒ $\int_a^b f(x)dx = I_a(b) = I_a(b) - I_a(a) = F_c(b) - F_c(a)$



Aufgabe 3: Integralfunktion (10)
Gegeben ist die Integralfunktion I mit $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ und $f(t) = t^2 - 1$.

a) Untersuchen Sie I auf Nullstellen sowie Extrem- und Wendestellen. (7)
b) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem die Schaubilder von I und f. (3)

Lösung

a) $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (t^2 - 1)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}$ (2)

Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. (GTR oder pq-Formel) (1)

Extremstellen bei $x_3 = -1$ und $x_4 = 1$, da VZW von $I'(x) = f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ (2)

Wendestellen bei $x_5 = 0$, da VZW von $I''(x) = f'(x) = 2x$ (2)

b) Skizzen von f mit Beschriftung (GTR) (1)

Skizzen von I mit Beschriftung (GTR) (2)

Aufgabe 4: Stammfunktionen
Bestimme alle Stammfunktionen für die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\qquad F_c(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 - 5x^3 - 3x$ $\qquad F_c(x) = x^3 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = ax^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Q}$ $\qquad F_c(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^{3n}$ $\qquad F_c(x) = \frac{1}{3n}x^{3n+1} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Q}$ $\qquad F_c(x) = \frac{a}{n}x^n + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = 2x^{-3}$ $\qquad F_c(x) = -x^{-2} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ $\qquad F_c(x) = -\frac{3}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

h) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 3x - 4$ $\qquad F_c(x) = -\frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = 3\sqrt{x}$ $\qquad F_c(x) = 2x\sqrt{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

j) $f(x) = x\sqrt{x}$ $\qquad F_c(x) = 0{,}4\,x^2\sqrt{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

k) $f(x) = 3\sqrt{x} + 4x - 3$ $\qquad F_c(x) = 2x\sqrt{x} + 2x^2 - 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

l) $f(x) = 6x^5 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$ $\qquad F_c(x) = x^6 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

m) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad F_c(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

n) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{\frac{3x}{4}}$ $\qquad F_c(x) = -\cos(x) + x\sqrt{\frac{x}{3}} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

o) $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ $\qquad F_c(x) = 8\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

p) $f_t(u) = 6u + 4t$ $\qquad F_{tc}(u) = 3u^2 + 4tu + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

q) $f_u(t) = 6u + 4t$ $\qquad F_{uc}(t) = 6ut + 2t^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

r) $f_x(t) = 2x^3 + 2t^2x^2$ $\qquad F_{xc}(t) = 2x^3t + \frac{2}{3}x^2t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

s) $f_x(t) = 2x^3 + 2tx^2$ $\qquad F_{xc}(t) = 2x^3t + t^2x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

t) $f_t(x) = 2x^3 + 2tx^2$ $\qquad F_{tc}(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}tx^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: Stammfunktionen mit gegebenem Anfangswert
Gib zu der Funktion f zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 an, für die $F_1(0) = 0$ und $F_2(0) = 2$ gilt.

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ $\qquad F_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ $\qquad F_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2$

b) $f(x) = 2\sin(x)$ $\qquad F_1(x) = -2\cos(x) + 2$ $\qquad F_2(x) = -2\cos(x) + 4$

Aufgabe 6: Stammfunktionen mit gegebenem Funktionswert
Gib zu der Funktion f eine Stammfunktion F an, für die $F(1) = 2$ gilt.

a) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 5\sqrt{x^3}$ $\qquad F(x) = -\frac{3}{x} + 2\sqrt{x^5} + 3$

b) $f(x) = \frac{8}{x^3} + 3\sqrt{x}$ $\qquad F(x) = -\frac{4}{x^2} + 2\sqrt{x^3} + 4$

Aufgabe 7: Integration (2)

Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_1^4 \left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^4 = 18$

b) $\int_1^3 \left(x^3-1\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_1^3 = 18$

c) $\int_1^3 \left(3x^3-4\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x\right]_1^3 = 60 - 8 = 52$

d) $\int_1^e \left(\frac{4}{x}-5\right)dx = \left[4\ln(x)-5x\right]_1^e = 9 - 5e$ (3)

e)) $\int_1^2 \left(\frac{4}{x^2}+1\right)dx = \left[x - \frac{4}{x}\right]_1^2 = 3$ (3)

f) $\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)+\cos(x)\right)dx = \left[-\cos(x)+\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = 1 + 1 = 2$

g) $\int_0^{\pi} \left(\sin(x)-\cos(x)\right)dx = \left[-\cos(x)-\sin(x)\right]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$

h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin(x) - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx = \left[-\cos(x)+\tan(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} - 2$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos(x))dx = 2x - \sin(x)\,{}_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 1.$ **(N 2009)** (2)

j) $\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)+\cos(t)\right)dx = \left[-\cos(x)+x\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot\cos(t) + 1.$ (4)

k) $\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)+\cos(t)\right)dt = \left[t\cdot\sin(x)+\sin(t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot\sin(x) + 1.$ (4)

l) $\int_0^{\pi} \left(\sin(x)+\cos(t)\right)dx = \left[-\cos(x)+x\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi} = \pi\cdot\cos(t) + 2$ (4)

m) $\int_0^{\pi} \left(\sin(x)+\cos(t)\right)dt = \left[t\cdot\sin(x)+\sin(t)\right]_0^{\pi} = \pi\cdot\sin(x).$ (4)

Aufgabe 8a: Flächen unterhalb der x-Achse (8)

a) Bestimme die Achsenschnittpunkte von $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ und skizziere ihren Verlauf. (5)

b) Berechne den Inhalt der Flächen, die von f und der x-Achse eingeschlossen werden. (3)

Aufgabe 8a: Flächen unterhalb der x-Achse (8)

a) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-4) \Rightarrow S_{x1/2}(\pm1|0)$, $S_{x3}(4|)$ und $S_y(0|4)$ (4)
Skizze (1)

b) $A = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx - \int_1^4 f(x)\cdot dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{63}{4}\right) = \frac{253}{12}$ (3)

Aufgabe 8b: Flächen unterhalb der x-Achse (8)

a) Bestimme die Achsenschnittpunkte von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ und skizziere ihren Verlauf. (5)

b) Berechne den Inhalt der Flächen, die von f und der x-Achse eingeschlossen werden. (3)

Aufgabe8b: Flächen unterhalb der x-Achse (8)

a) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \Rightarrow S_{x1/2}(\pm1|0)$, $S_{x3}(\pm2|0)$ und $S_y(0|4)$ (4)
Skizze (1)

b) $A = 2\int_0^1 f(x)\cdot dx - 2\int_1^2 f(x)\cdot dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 = 2(\frac{38}{15} - \left(-\frac{22}{15}\right) = 8$ (3)

Aufgabe 9: Integralgleichungen
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $\int_0^x (2t-1)\,dt = 2 \Leftrightarrow \left[t^2 - t\right]_0^x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow L = \{1;-2\}.$

b) $\int_0^x (3t^2-2)\,dt = 4 \Leftrightarrow \left[t^3 - 2t\right]_0^x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 4 \Rightarrow L = \{2\}.$

c) $\int_0^x (3t^2-2t)\,dt = 4 \Leftrightarrow \left[t^3 - t^2\right]_0^x = 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Rightarrow L = \{2\}.$

Aufgabe 10: Integralgleichungen (5)
Wie hoch muss die Waagrechte y = t liegen, damit sie die Fläche zwischen der x-Achse und der Parabel $f(x) = 4 - x^2$ in zwei gleich große Teile teilt?

Aufgabe 10: Integralgleichungen (5)

Die gesamte Fläche hat den Inhalt $\int_{-2}^{2} (4-x^2)\cdot dx = 2\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{32}{3}$ (1)

Die Waagrechte schneidet f an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{4-t}$ (1)

Der obere Teil der Fläche hat den Inhalt $2\cdot\int_0^{\sqrt{4-t}} (f(x)-t)\cdot dx = 2\int_0^{\sqrt{4-t}} (4-t-x^2)\cdot dx = 2\left[(4-t)x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{4-t}} = \frac{4}{3}\left(4-t\right)^{\frac{3}{2}}$ (2)

Er hat den halben Inhalt wie die Gesamtfläche, wenn $\frac{4}{3}\left(4-t\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \left(4-t\right)^{\frac{3}{2}} = 4 \Leftrightarrow t = 4 - \sqrt[3]{16} \approx 1{,}48$ (1)

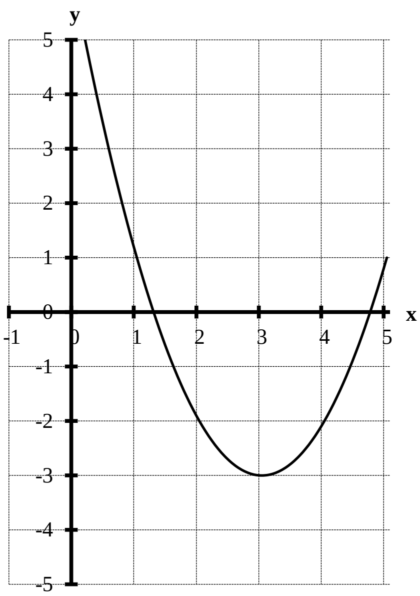
Aufgabe 11: Integral mit variablen Grenzen (4)
Berechne in Abhängigkeit von t den Inhalt A(t) der Fläche, die von der x-Achse, der Kurve y = sin(x) + 1 und den Senkrechten bei x = −t und x = + t eingeschlossen wird.

Lösung:

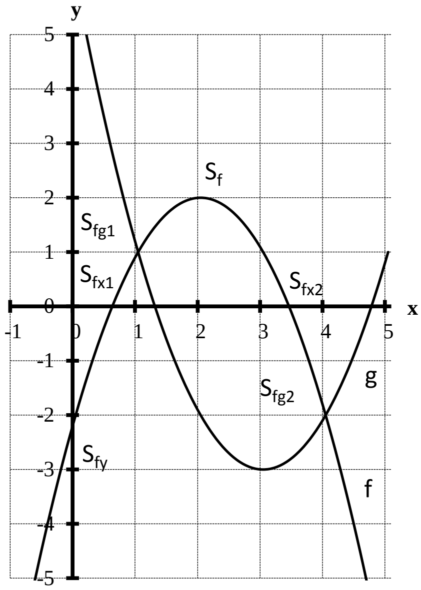
$A(t) = \int_{-t}^{t} (\sin(x)+1)dx = \left[-\cos(x)+x\right]_{-t}^{t} = -\cos(t) + \cos(-t) + 2t = 2t.$

Problem 12a: Area between two curves (14)

a) Find the Maximum and the x and y intercepts of $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. (4)
b) Find the intersection points of f and $g(x) = (x-3)^2 - 3$. (4)
c) Draw the graph of f into the coordinate system on the right which already contains g. (2)
d) Determine the measure of the area enclosed by f and g. (4)



Solutions:



a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2 \Rightarrow S_f(2|2)$, $S_{fy}(0|-2)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (4)

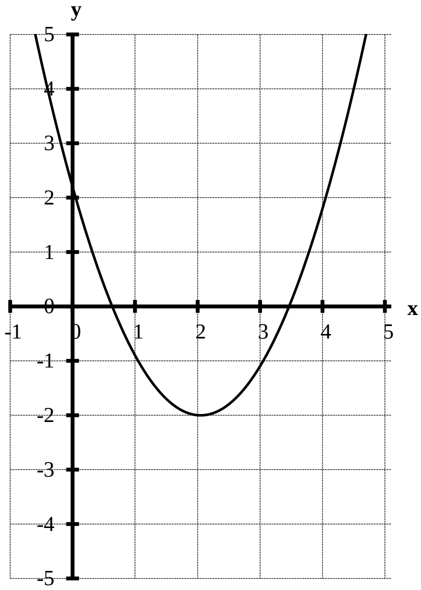
b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|1)$, $S_{fg2}(4|-2)$. (4)

c) Drawing (see right) (2)

d) $A = \int_1^4 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right)dx$ (2)

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 9$ FE (2)

Exercise 12b: Area between two graphs (14)



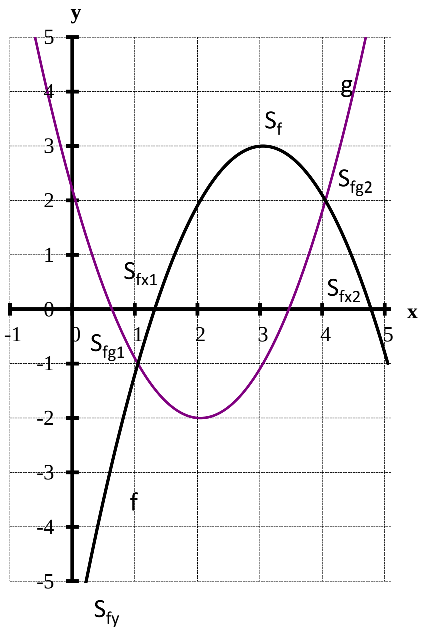
a) Find the Maximum and the x and y intercepts of $f(x) = -x^2 + 6x - 6$. (4)

b) Find the intersection points of f and $g(x) = (x-2)^2 - 2$. (4)

c) Draw the graph of f into the coordinate system on the right which already contains g. (2)

d) Determine the measure of the area enclosed by f and g. (4)

Solutions



a) $f(x) = -(x-3)^2 + 3 \Rightarrow S_f(3|3)$, $S_{fy}(0|-6)$ und $S_{fx1/2}(3 \pm \sqrt{3}\ |0)$ (4)

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|-1)$, $S_{fg2}(4|2)$. (4)

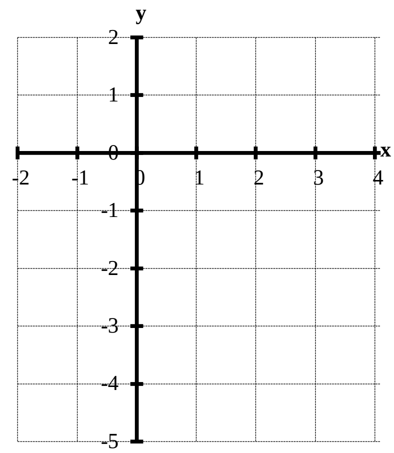
c) Drawing (see right) (2)

d) $A = \int_1^4 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right)dx$ (2)

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 9$ FE (2)

Problem 12c: Area between two curves (16)

a) Find x- and y-intercepts and the Minumum of $f(x) = (x-1)^2 - 4$. (4)
b) Draw the parabolas f and $g(x) = -x^2 + 1$ into the coordinate system on the right. (2)
c) Find the intersection points of f and g. (4)
d) Find the measure of the area enclosed by f and g. (4)



Solutions:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

$\Rightarrow S_f(1|-4)$, $S_{fy}(0|-3)$, $S_{fx1}(-1|0)$ and $S_{fx2}(3|0)$ (3)

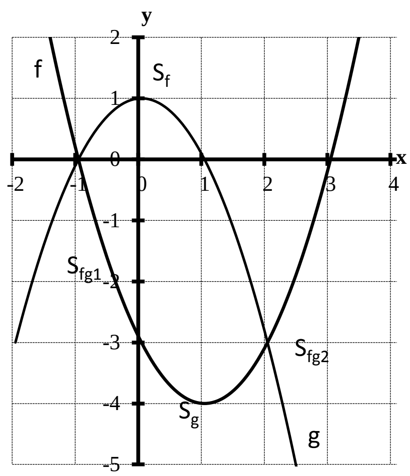
b) Drawing (see right) (2)

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1)$

$\Rightarrow S_{fg1}(-1|0)$, $S_{fg2}(2|-3)$. (4)

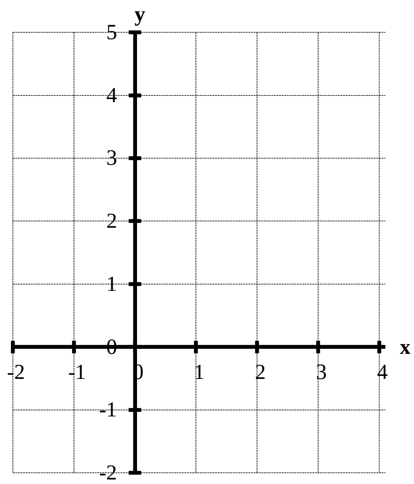
d) $A = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$ FE (4)



Problem 12d: Area between two curves (16)

a) Find x- and y-intercepts and the Maximum of $f(x) = -(x-1)^2 + 4$. (4)
b) Draw the parabolas f and $g(x) = x^2 - 1$ into the coordinate system on the right. (2)
c) Find the intersection points of f and g. (4)
d) Find the measure of the area enclosed by f and g. (4)



Solutions:

a) $f(x) = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-3)(x+1)$

$\Rightarrow S_f(1|4)$, $S_{fy}(0|3)$, $S_{fx1}(-1|0)$ and $S_{fx2}(3|0)$ (3)

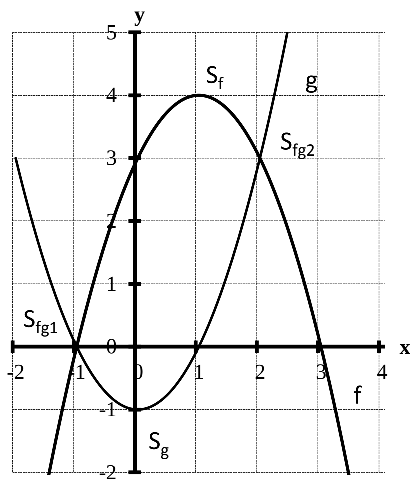
b) Drawing (see right) (2)

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1)$

$\Rightarrow S_{fg1}(-1|0)$, $S_{fg2}(2|3)$. (4)

d) $A = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$ FE (4)



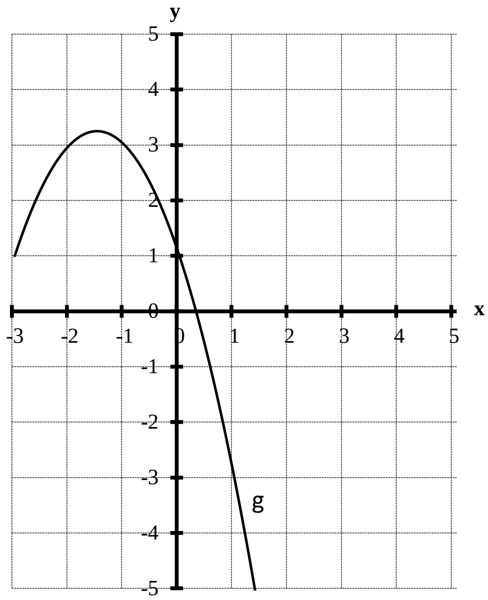
Problem 12e: Area between two curves (16)

a) Find x- and y-intercepts and vertices of $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$. (4)

b) Find the intersection points of f and $g(x) = -x^2 - 3x + 1$. (4)

c) Draw the parabola f into the coordinate system on the right which already contains g. (2)

d) Find the measure of the area enclosed by f and g. (4)



Solutions:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{8} = \frac{1}{2}(x-4)(x+1)$

$\Rightarrow S_f(\frac{3}{2}|-\frac{25}{8})$, $S_{fy}(0|-2)$, $S_{fx1}(-1|0)$ and $S_{fx2}(4|0)$ (3)

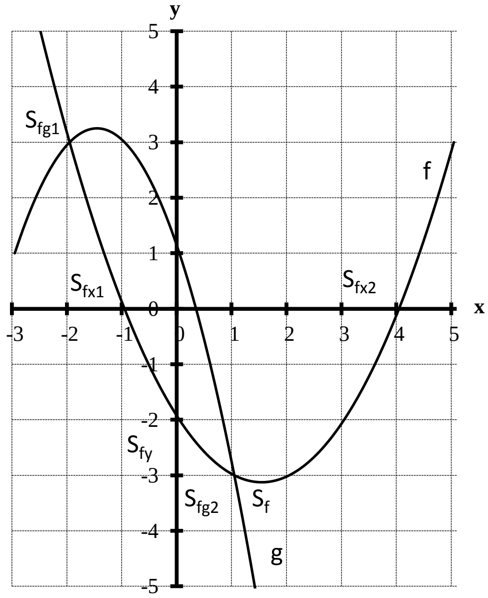
b) Drawing (see right) (2)

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{3}{2}(x-1)(x+2)$

$\Rightarrow S_{fg1}(-2|3)$, $S_{fg2}(1|-3)$. (4)

d) $A = \int_{-2}^{1}(g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{4} - (-5) = \frac{27}{4}$ (4)



Aufgabe 12 f: Flächen zwischen zwei Graphen (5)

Der Graph von $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 3$ und die beiden Koordinatenachsen schließen im 1. Quadranten des Koordinatensystems eine Fläche ein. Diese wird durch die Winkelhalbierende des 1. Quadranten in zwei Teile geteilt. In welchem Verhältnis stehen die beiden Inhalte A_1 und A_2 zueinander?

Aufgabe 12 f: Flächen zwischen zwei Graphen (5)

$f(x) = -\frac{1}{8}(x^2 + 2x - 24) = -\frac{1}{8}(x+6)(x-4) \Rightarrow$ Achsenschnittpunkte $S_y(0|3)$, $S_{x1}(-6|0)$ und $S_{x2}(4|0)$ (1)

$\Rightarrow$ Gesamtfläche $A_1 + A_2 = \int_0^4 f(x)\cdot dx = \left[-\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3x\right]_0^4 = \frac{22}{3}$ (1)

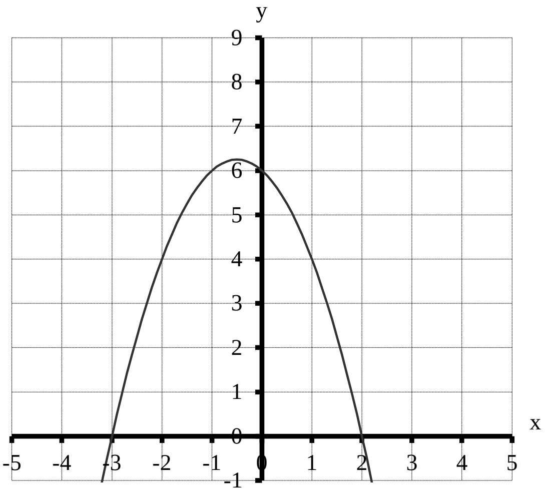
Schnittpunkt mit Winkelhalbierenden $f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}(x^2 + 10x - 24) = 0 \Rightarrow x_1 = -12$ und $x_2 = 2$ (1)

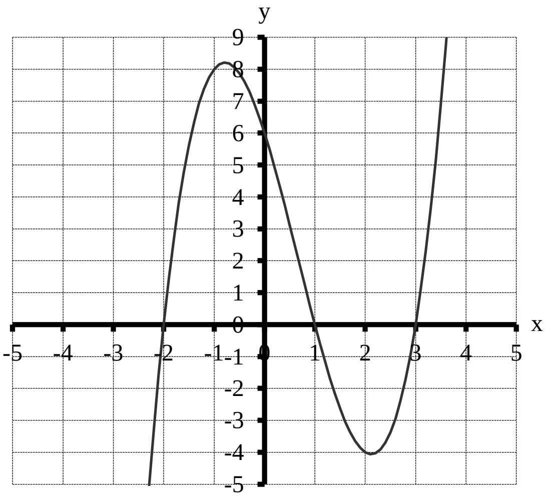
$\Rightarrow$ Obere Teilfläche $A_1 = \int_0^2 (f(x) - x)\cdot dx = \left[-\frac{1}{24}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + 3x\right]_0^2 = \frac{19}{6}$ (1)

$\Rightarrow$ Untere Teilfläche $A_2 = \frac{25}{6}$ und Verhältnis $A_1 : A_2 = 19 : 25$ (1)

Aufgabe 13: Bestimmung einer Funktionsgleichung und Integration

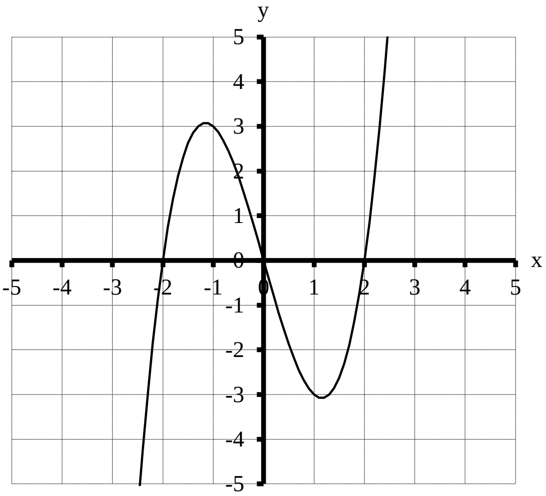
Bestimme die Funktionsgleichung und den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild und der x-Achse eingeschlossen wird:

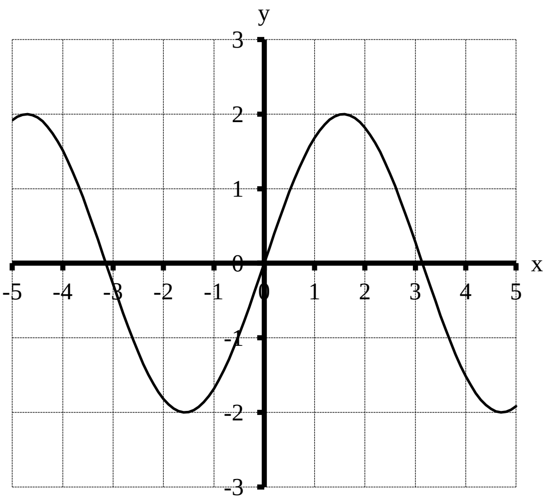




a) ganzrationale Funktion 2. Grades

b) ganzrationale Funktion 3. Grades





c) ganzrationale Funktion 3. Grades

d) trigonometrische Funktion

Lösungen

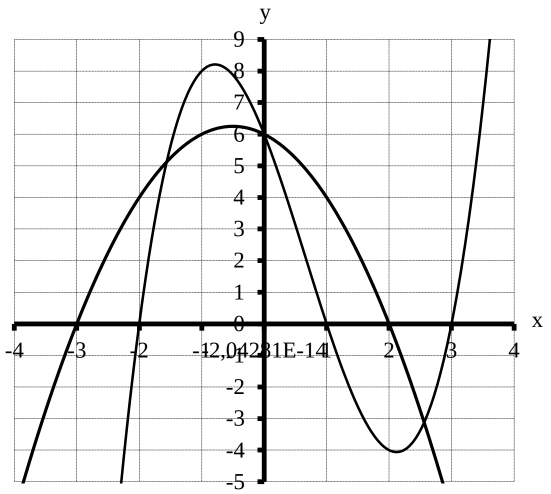
a) $f(x) = -(x-2)(x+3) = -x^2 - x + 6$ mit $\int_{-3}^{2}(-x^2 - x + 6)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2} = \frac{35}{3} + \frac{5}{2} + 30 = 44\frac{1}{6}$

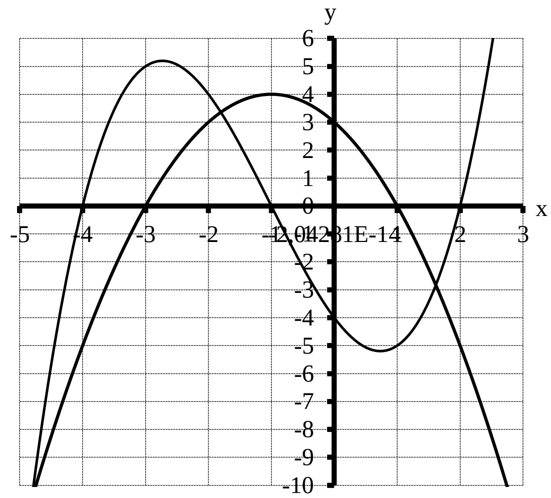
b) $f(x) = (x-3)(x-1)(x+2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mit $\int_{-2}^{1}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{1} = -\frac{15}{4} - 6 + \frac{15}{2} + 18 = 15\frac{3}{4}$ und $\int_{1}^{3}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{3} = 20 - \frac{52}{3} - 20 + 12 = -5\frac{1}{3}$ ⇒ gesamter Flächeninhalt $A = 15\frac{3}{4} + 5\frac{1}{3} = 21\frac{1}{12}$ FE

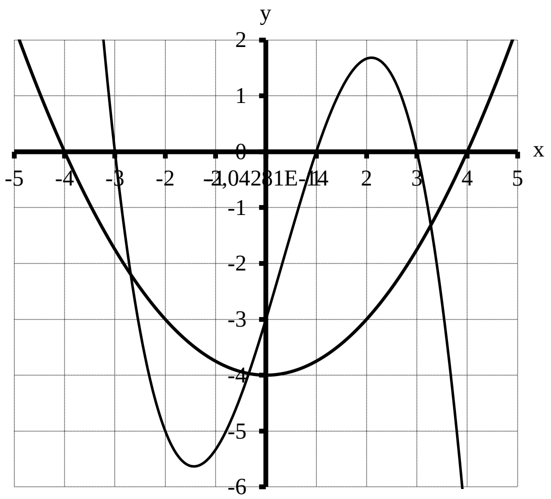
c) $f(x) = (x-2)x(x+2) = x^3 - 4x$ mit $\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} = 4 - 8 = -4$ ⇒ gesamter Flächeninhalt $A = 4 + 4 = 8$ FE wegen Achsensymmetrie zur y-Achse.

d) $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ mit $\int_{0}^{\pi} 2\sin(x)dx = \left.-2\cos(x)\right|_{0}^{\pi} = 2 + 2 = 4$ ⇒ gesamter Flächeninhalt $A = 4 + 4 = 8$ FE wegen Achsensymmetrie zur y-Achse.

Aufgabe 14: Bestimmung einer Funktionsgleichung und Integration (6)
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden ganzrationalen Funktionen sowie den Inhalt der von ihren Schaubildern eingeschlossenen Flächen. Geben Sie alle Maßzahlen auf zwei Nachkommastellen genau an.







Lösungen

a) $f(x) = -(x+3)(x-2)$ und $g(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$ (2)

$A \approx \int_{-1,56}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{2,56} (f(x) - g(x))dx \approx 2{,}12 + 7{,}96 = 10{,}08$ FE (4)

b) $f(x) = -(x+3)(x-1)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x+1)(x-2)$ (2)

$A \approx \int_{-4,81}^{-1,80} (g(x) - f(x))dx + \int_{-1,80}^{1,61} (f(x) - g(x))dx \approx 11{,}16 + 15{,}68 = 26{,}84$ FE (4)

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x-4)$ und $g(x) = -\frac{1}{3}(x+3)(x-1)(x-3)$ (2)

$A \approx \int_{-2,69}^{-0,34} (f(x) - g(x))dx + \int_{-0,34}^{3,28} (g(x) - f(x))dx \approx 3{,}43 + 10{,}92 = 14{,}35$ FE (4)