5.5. Prüfungsaufgaben zu Integrationsmethoden

Aufgabe 1a: **Substitutionsregel (2)**
Geben Sie für die Funktion f eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{2}x\right)^4$ b) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{4}x\right)^5$ c) $f(t) = 3 \cdot e^{-5t}$ d) $f(t) = 5 \cdot e^{-3t}$

Lösungen

a) $F(x) = -\frac{2}{15}\left(5 - \frac{3}{2}x\right)^5$ (2)

b) $F(x) = -\frac{2}{9}\left(5 - \frac{3}{4}x\right)^6$ (2)

c) $F_c(t) = -\frac{3}{5} \cdot e^{-5t} + c$ (2)

d) $F_c(t) = -\frac{5}{3} \cdot e^{-5t} + c$ (2)

Question 1b: Substitution rule (8)

a) Let $f'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1}$. Given that f(0) = e, find f(x). (2)

b) Determine $\int_1^2 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$ (2)

c) Find the curve f(x) through the point (1|0) with the gradient $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$. (2)

d) Determine $\int_1^2 \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} \cdot dx$ (2)

Solutions

a) $f(x) = \ln(x^4 - x^2 + 1) + e$ (2)

b) $\int_1^2 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^4 - e$ (2)

c) $f(x) = e^{x^2} - e$ (2)

d) $\int_1^2 \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} \cdot dx = \left[\ln\left(x^4 - x^2 + 1\right)\right]_1^2 = \ln(13)$ (2)

Aufgabe 2: Substitutionsmethode
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x + 1)]_0^{e-1} = 1 - 0 = 1$

b) $\int_0^{19} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{19} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

c) $\int_1^2 \sqrt{4+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(4+x)\sqrt{4+x}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(6\sqrt{6} - 5\sqrt{5})$

d) $\int_1^2 (1-2x)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(1-2x)^4\right]_1^2 = 10$

e) $\int_1^2 (1-3x)^3\,dx = \left[\frac{1}{12}(1-3x)^4\right]_1^2 = 50\frac{3}{4}$

f) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-2x}} dx = \left[\sqrt{4-2x}\right]_{-1}^0 = 2 - \sqrt{6}$

g) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{4-3x}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7}$

Aufgabe 3: Partielle Integration
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^1 x\cdot e^x dx = \left[x\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1$ FE

b) $\int_1^2 x\cdot e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{3}e^{-3x} dx = \frac{1}{3}e^{-3} - \frac{2}{3}e^{-6} - \left[\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_1^2 = \frac{4}{9}e^{-3} - \frac{7}{9}e^{-6}$ FE

c) $\int_0^1 (2x+3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[-2\cdot(2x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^1 - \int_0^1 -4\cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = 6 - \frac{10}{\sqrt{e}} - \left[8\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^1 = 14 - \frac{18}{\sqrt{e}}$ FE

d) $\int_1^e x\cdot \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1)$ FE

e) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$ FE

f) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{\ln(2x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(2x)}{x}\right]_{1/2}^{e/2} - \int_{1/2}^{e/2} -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{2}{e} - \left[-\frac{\ln(2x)}{x}\right]_{1/2}^{e/2} = 2 - \frac{4}{e}$ FE

g) $\int_{1/4}^2 (\frac{1}{2}x+2)\cdot \ln(4x) dx = \left[(\frac{1}{4}x^2+2x)\cdot\ln(4x)\right]_{1/4}^2 - \int_{1/4}^2 (\frac{1}{4}x+2) dx = 5 - \left[(\frac{1}{8}x^2+2x)\right]_{1/4}^2 = 1\frac{1}{128}$ FE

h) $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x-4)^3} dx = \left[\frac{-2x}{(x-4)^2}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-2}{(x-4)^2} dx = -\frac{2}{25} - \left[\frac{2}{x-4}\right]_{-1}^0 = -\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{1}{50}$ FE

i) $\int_0^2 \frac{6t}{\sqrt{3t^2+4}} dt = \left[2\sqrt{3t^2+4}\right]_0^2 = 4$

j) $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+5t^3)^2} dt = \frac{1}{15}\left[-\frac{1}{1+5t^3}\right]_0^1 = \frac{1}{18}$

k) $\int_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$

Question 4: Substitution method (5)
Water begins leaking from a tank holding 2000 gallons of water. The rate at which it is leaking, measured in gallons per minute, can be modeled by the function $r(t) = -100\cdot e^{-\frac{1}{20}t}$.

a) Write down an expression for the volume s(t) of water lost after t minutes. Use integral notation. (1)
b) Solve the integral from a). (2)
c) Write down an expression for the volume v(t) of water left in the tank after t minutes. (1)
d) How much water is in the tank at the end of 20 minutes? (1)

Question 4: Substitution method (5)

a) $s(t) = \int_0^\tau r(\tau)\cdot dt$ (1)

b) $s(t) = 2000\int_0^\tau \left(-\frac{1}{20}\right) e^{-\frac{1}{20}t}\cdot dt = 2000\ [e^{-\frac{1}{20}t}]_0^\tau = -2000\cdot(1 - e^{-\frac{1}{20}t})$ (< 0!) (2)

c) $v(t) = 2000 + s(t) = 2000\cdot e^{-\frac{1}{20}t}$ (1)

d) $v(20) = \frac{2000}{e} \approx 735{,}76$ gallons (1)

Question 5: Substitution method (7)

The diagram shows part of the graphs of and g. Regions A and B are shaded.

a) Write down an expression for f(x) (1)

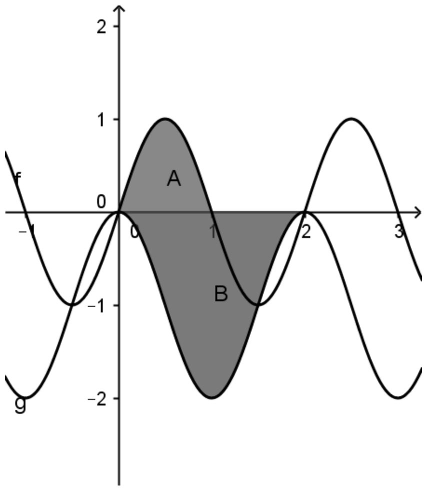
b) Write down an expression for the area of region A. (1)

c) Show that A = $\frac{2}{\pi}$. (1)

d) Write down an expression for g(x). (1)

e) Write down an expression for the area of region B. (1)

f) Show that B = 2. (2)



Question 5: Substitution method (7)

a) $f(x) = \sin(\pi x)$ (1)

b) $A = \int_0^1 \sin(\pi x)\cdot dx$ (1)

c) $A = = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$ (1)

d) $g(x) = \cos(\pi x) - 1$ (1)

e) $B = \int_0^2 \left(1-\cos(\pi x)\right)\cdot dx$ (1)

f) $B = \left[x - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^2 = (2-0)-(0-0) = 2.$ (2)

Question 6: Solids of rotation (8)

The diagram shows part of the graph of $f(x) = 1 - x^3$. Regions A and B are shaded.

a) Write down an expression for the area of region B. (1)

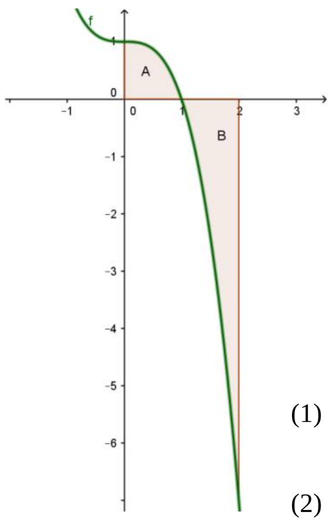
b) Calculate the area of region B. (2)

c) Write down an expression for the total area of shaded regions A and B. (1)

d) Evaluate the expression from c) (1)

e) Region B is rotated about the x-axis. Write down an expression for the volume of the solid formed. (1)

f) Evaluate the expression from e) (2)



Question 6: Solids of rotation (8)

The diagram shows part of the graph of $f(x) = 1 - x^3$. Regions A and B are shaded.

a) $B = -\int_1^2 (1-x^3)\cdot dx$ (1)

b) $B = -\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = -(2-4) + (1 - \frac{1}{4}) = \frac{11}{4}$ (2)

c) $A + B = \int_0^1 (1-x^3)\cdot dx \;-\; \int_1^2 (1-x^3)\cdot dx$ (1)

d) $A + B = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{11}{4} = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2}$ (1)

e) $V = \pi \int_1^2 (1-x^3)^2 \cdot dx$ (1)

f) $V = \pi \int_1^2 (1-2x^3+x^6)\cdot dx = \pi\left[x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \pi(1 - \frac{15}{2} + \frac{127}{7}) = \frac{14-105+254}{14}\pi = \frac{163\pi}{14} \approx 11{,}64\pi$ (2)

Aufgabe 7: Rotationsvolumen (5)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = 20\sqrt{\frac{x-t}{10}} - t$ für $x > t > 0$. Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau das Volumen in Litern und das Gewicht in kg einer Salatschüssel aus Glas ($\rho = 2{,}5\ g/cm^3$), die durch die im Bereich $0 \le x \le 10$ um die x-Achse rotierenden Schaubilder von f_0 und $f_{0,5}$ begrenzt wird. (1 LE = 1 cm)

Lösung

$V = V_a - V_i = \pi\int_0^2 \left(f_0(x)\right)^2 dx \; - \; \pi\int_0^2 \left(f_{0,5}(x)\right)^2 dx \approx 6{,}28\text{ l} - 5{,}29\text{ l} = 0{,}99\text{ l} \Rightarrow m = \rho\cdot V = 2{,}47\text{ kg}$ (5)

Aufgabe 8: Rotationsvolumen (4)

a) Die Schaubilder der Funktionen $f(x)= x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie ihren Inhalt
b) Die Fläche aus Teil a) rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Inhalt des Rotationskörpers.

Lösung:

a) $A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ FE (2)

b) $V = \pi\int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi$VE (2)

Aufgabe 9: Rotation um die y-Achse (8)

Der Innenraum eines 12 cm hohen Sektglases wird durch Rotation der Graphen von $y = kx^2$ um die y-Achse beschrieben. Dabei sind x und y in cm angegeben und der Parameter $k > 0$.
a) Für welches k hat der obere Rand des Sektglases einen Radius von 3 cm? (1)
b) Berechne das Volumen des Selktglases aus a). (3)
c) Sekt wird in Mengen von 1 dl serviert. Wie gross ist die Füllhöhe im Glas? (3)
d) An einem Apèro stossen alle 20 Teilnehmer jeweils miteinander an. Wie oft klingen die Glaser? (1)

Lösungen

$12 = k\cdot 3^2 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$. (1)

$V = \pi\int_0^3 x^2dy = \frac{3\pi}{4}\int_0^{12} ydy = \frac{3\pi}{4}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{12} = 54\pi\text{ cm}^3$. (3)

$100 = \pi\int_0^{x(h)} x^2dy = \frac{3\pi}{4}\int_0^h ydy = \frac{3\pi}{4}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h = \frac{3\pi}{8}h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{800}{3\pi}} \approx$

Sie klingen

Aufgabe 10: Rotation um x- und y-Achse (5)

Bestimme das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$
a) im Bereich $-1 < x < 1$ um die x-Achse
b) im Bereich $-2 < y < 2$ um die y-Achse
entsteht. Warum ist das Volumen des 1. Körpers viel grösser, obwohl er den gleichen Querschnitt hat?

Lösungen:

a) $V = 8\pi\int_0^1 (1-x^2)dx = 8\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{3}\pi.$ (2)

b) $V = 2\pi\int_0^2 (1-\frac{y^2}{4})dy = 2\pi\left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$ (2)

Der Körper in a) ist doppelt so tief wie der Körper in b) (1)

Question 11a: Hollow bodies

The outer surface of a salad bowl is defined by $f(x) = 2\sqrt{16-x^2}$ cm rotating about the x-axis in the domain $0 \le x \le 4$ cm. Its inner surface is given likewise by $g(x) = 2\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$ cm in the domain $0 \le x \le \frac{7}{2}$ cm. Determine the weight of the salad bowl if it made of glass with density $\rho = 3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Solution:

Outer Volume $V_1 = \int_0^4 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = 4\pi\int_0^4\left(16-x^2\right)dx = 4\pi\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 4\pi(64 - \frac{64}{3})\ cm^3$ (2)

Inner Volume $V_2 = \int_0^{3,5} \pi\left(g(x)\right)^2 dx = 4\pi\int_0^{3,5}\left(16-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)dx = 4\pi\left[16x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{3,5} = 4\pi(56 - \frac{64}{3} + \frac{1}{24})\ cm^3$ (2)

Volume $V = V_1 - V_2 = 4\pi(8 - \frac{1}{24}) = (32 - \frac{1}{8})\pi = 31{,}875\pi\ cm^3 \approx 100{,}14\ cm^3$ (1)

Weight $m = \rho\cdot V = 95{,}625\pi\ g \approx 300{,}41\ g$ (1)

Question 11b: Hollow bodies

The outer surface of a salad bowl is defined by $f(x) = 5\sqrt{x}$ cm rotating about the x-axis in the domain $0 \le x \le 4$ cm. Its inner surface is given likewise by $g(x) = 5\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ cm in the domain $\frac{1}{2} \le x \le 4$ cm. Determine the weight of the salad bowl if it made of glass with density $\rho = 3\ \frac{g}{cm^3}$.

Solution:

Outer Volume $V_1 = \int_0^4 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = 25\pi\int_0^4 x\,dx = 25\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 200\pi.\ cm^3$ (2)

Inner Volume $V_2 = \int_{0,5}^4 \pi\left(g(x)\right)^2 dx = 25\pi\int_{0,5}^4\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = 25\pi\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]_{0,5}^4 = 25\pi(\frac{49}{8} - 0) = 153{,}125\pi\ cm^3$ (2)

Volume $V = V_1 - V_2 = 46{,}875\pi\ cm^3 \approx 147{,}26\ cm^3$ (1)

Weight $m = \rho\cdot V \approx 441{,}78\ g$ (1)

Aufgabe 12a: Mittelwerte (3)

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 2x^2 - x$ im Intervall [0; 2].

Lösung

$\overline{m} = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2 - x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{5}{3}$ (3)

Aufgabe 12b: Mittelwerte (3)

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 3x^2 - x$ im Intervall [0; 3].

Lösung

$\overline{m} = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x^2 - x)dx = \frac{1}{3}\left[x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{15}{2}$ (3)

Aufgabe 13a: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
b) mit der Sehnentrapezmethode für n = 2 Intervalle (2)
c) mit der Keplerschen Faßregel für n = 2 Intervalle (2)

Lösung

a) $\int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx = \left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^2 = 1$ (2)

b) $\int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx \approx \frac{2}{4}(0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 2) = 1{,}25$ (2)

c) $\int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx \approx \frac{2}{6}(0 + 4\cdot\frac{1}{4} + 2) = 1$ (2)

Aufgabe 13b: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^4 \frac{1}{4}x^3 dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
b) mit der Sehnentrapezmethode für n = 2 Intervalle (2)
c) mit der Keplerschen Faßregel für n = 2 Intervalle (2)

Lösung

a) $\int_0^4 \frac{1}{4}x^3 dx = \left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^4 = 16$ (2)

b) $\int_0^4 \frac{1}{4}x^3 dx \approx \frac{4}{4}(0 + 2\cdot 2 + 16) = 20$ (2)

c) $\int_0^4 \frac{1}{4}x^3 dx \approx \frac{4}{6}(0 + 4\cdot 2 + 16) = 16$ (2)

Aufgabe 13c: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^5 \frac{1}{x^3} dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
b) mit der Sehnentrapezmethode für n = 2 Intervalle (2)
c) mit der Keplerschen Faßregel für n = 2 Intervalle (2)

Lösung

a) $\int_1^5 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^5 = \frac{12}{25} = 0{,}48$ (2)

b) $\int_1^5 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{4}(1 + 2\cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{125}) = 1{,}08$ (2)

c) $\int_1^5 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{6}(1 + 4\cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{125}) = 0{,}77$ (2)

Aufgabe 13d: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 \frac{1}{x^3} dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
b) mit der Sehnentrapezmethode für n = 2 Intervalle (2)
c) mit der Keplerschen Faßregel für n = 2 Intervalle (2)

Lösung

a) $\int_2^6 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^6 = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$ (2)

b) $\int_2^6 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{4}(\frac{1}{8} + 2\cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{216}) \approx 0{,}16$ (2)

c) $\int_2^6 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{6}(\frac{1}{8} + 4\cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{216}) \approx 0{,}13$ (2)

Aufgabe 13e: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
b) mit der Sehnentrapezmethode für n = 2 Intervalle (2)
c) mit der Keplerschen Faßregel für n = 2 Intervalle (2)

Lösung

a) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2 \approx 0{,}805$ (2)

b) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx \approx \frac{2}{4}(0 + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}) = \frac{7}{10} = 0{,}7$ (2)

c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx \approx \frac{2}{6}(0 + 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}) = \frac{4}{5} = 0{,}8$ (2)