Integralrechnung

Berechnung von Integralen mit der Streifenmethode

Definition:

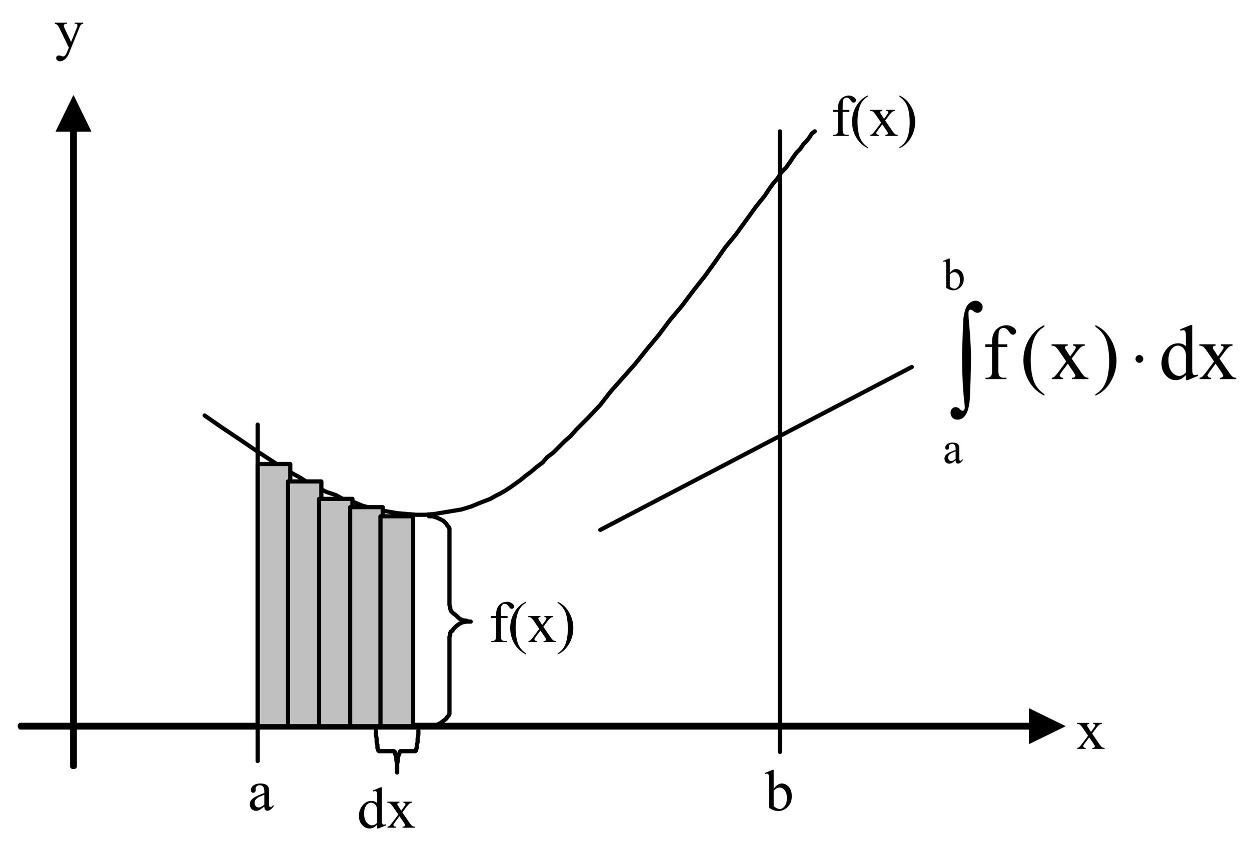
Gegeben seien a, b $\in \mathbb{R}$ mit a < b und eine auf [a; b] stetige Funktion f .

Der **orientierte Inhalt** der Fläche, die durch

- die x-Achse,
- das Schaubild des **Integranden** f,
- die **untere Grenze** x = a und
- die **obere Grenze** x = b

begrenzt wird, heißt dann **Integral** $\int_a^b f(x)dx$

von f über x zwischen a und b.



Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für stetige Funktionen

Gegeben sei eine auf dem Intervall [a,b] **stetige** Funktion f(x) mit der **Stammfunktion** F(x). Das Integral von f über x zwischen a und b ist gleich der Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an den Stellen a und b:

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a)$$

Beweis:

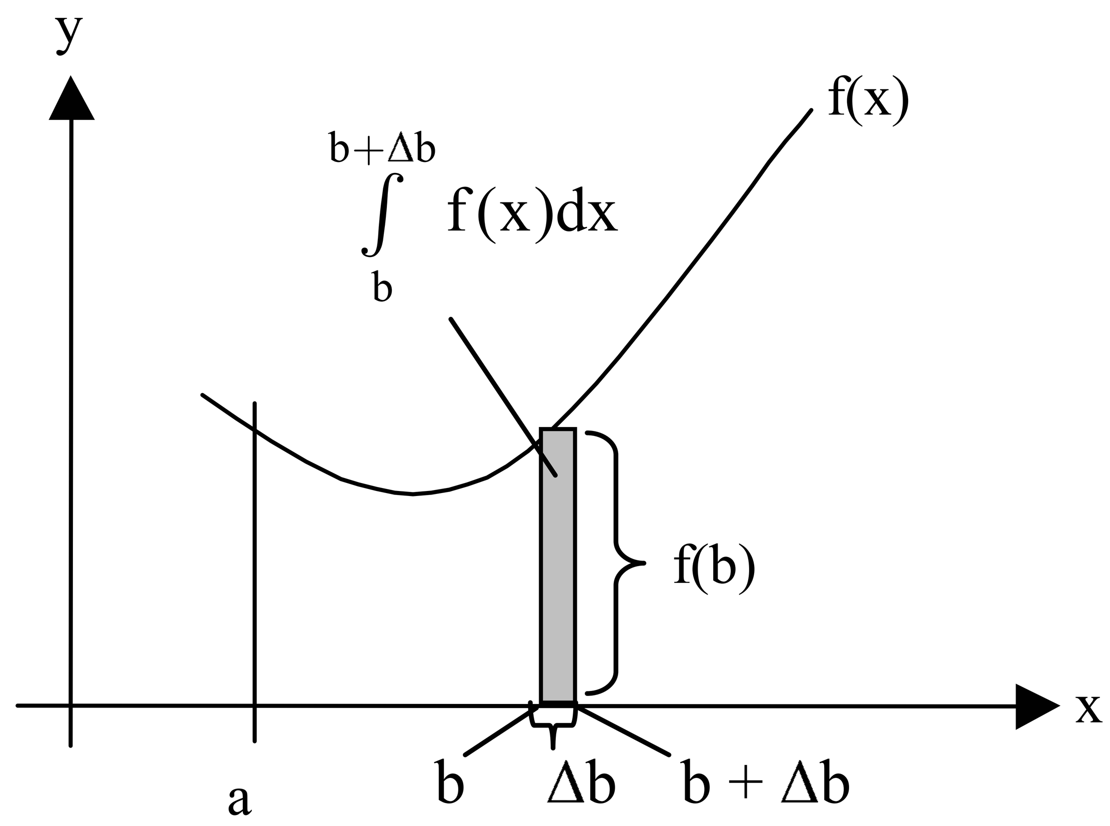
$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)' = (I_a(b))'$$

$$= \lim_{\Delta b\to 0} \frac{I_a(b+\Delta b) - I_a(b)}{\Delta b}$$

$$= \lim_{\Delta b\to 0} \frac{1}{\Delta b}\left(\int_a^{b+\Delta b} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right)$$

$$= \lim_{\Delta b\to 0} \frac{1}{\Delta b}\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$$

$$= f(b),$$



denn wegen der **Stetigkeit** von f strebt $\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$ gegen f(b)·h für $\Delta b \to 0$. Dazu wählt man die Stellen x_{hm} und $x_{hM} \in$ [b;b + Δb], an denen f den kleinsten bzw. größten Wert im Intervall [b;b + Δb] annimmt. Diese Stellen existieren, weil das Intervall [b;b + Δb] abgeschlossen und f stetig ist. Dann gilt die Abschätzung $f(x_{hm})\cdot\Delta b \le \int_b^{b+\Delta b} f(x)dx \le f(x_{hM})\cdot\Delta b$. Für $\Delta b \to 0$ streben x_{hm} und x_{hM} gegen b. Wieder wegen der Stetigkeit von f streben dann auch $f(x_{hm})$ und $f(x_{hM})$ gegen b., d.h. $\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$ strebt gegen f(b)·Δb.

Damit ist gezeigt, dass $(I_a(b))' = f(b) \Leftrightarrow I_a(b) = F_c(b) = F_0(b) + c$. Zur Berechnung von c setzt man b = a und erhält $0 = I_a(a) = F_0(a) + c \Leftrightarrow c = -F_0(a)$. Durch Einsetzen ergibt sich die Formel $I_a(b) = F_0(b) - F_0(a)$.

Beispiel:

$$\int_1^2 (x^2+5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 5x\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}2^3 + 5\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 + 5\cdot 1\right) = \frac{22}{3}$$