

5.6. Aufgaben zum exponentiellen und beschränkten Wachstum

Aufgabe 1: Radioaktive Strahlung

Die Masse eines radioaktiven Präparates betrug zu Beobachtungsbeginn 5 g und nimmt seitdem jede Stunde um 2 % ab. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer Differentialgleichung und geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 2: Bakterienkultur

Die Fläche einer Bakterienkultur betrug zu Beobachtungsbeginn 5 cm^2 und nimmt seitdem jede Stunde um 2 % zu. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer Differentialgleichung und geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 3: Baumschäden

In einem Bestand von ursprünglich 10 000 gesunden Bäumen werden jedes Jahr 8 % der noch nicht geschädigten Bäume durch den Borkenkäfer befallen. Formuliere die Differentialgleichung für die Zahl $B(t)$ der kranken Bäume nach t Jahren und bestimme $B(t)$. Wie viele kranke Bäume sind nach 5 Jahren zu erwarten?

Aufgabe 4: Pilzkultur

Eine Petrischale mit einer Gesamtfläche von 60 cm^2 ist zur Zeit $t = 0$ bereits teilweise mit einer Pilzkultur bedeckt. Für das weitere Wachstum wurde experimentell die Formel $B'(t) = 10 - 0,25 \cdot B(t)$ ermittelt. Dabei ist $B(t)$ die nach t Tagen zusätzlich bedeckte Fläche in cm^2 . Zeige, dass es sich um ein beschränktes Wachstum handelt, und bestimme $B(t)$. Wie viele cm^2 waren zu Beginn bereits bedeckt? Wie viele cm^2 bedeckt die Pilzkultur nach 3 Tagen?

Aufgabe 5: Marktsättigung

In einem Land werden pro Jahr 100 000 Rasierer verkauft. Eine koreanische Firma bringt nach einer dreimonatigen massiven Werbeaktion ein neues Modell unter einem „coolen“ finnischem Label auf den Markt

- Was spricht für die Annahme, dass die Zahl $Z(t)$ der verkauften Artikel nach t Monaten nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums zunehmen wird? Gib die Sättigungsgrenze S an und formuliere die entsprechende Differentialgleichung.
- Bestimme die Gleichung für $B(t)$, wenn im ersten Monat 20 000 Stück verkauft wurden.
- Ist es aufgrund dieser Erfahrung realistisch anzunehmen, dass sich im ersten Halbjahr 50 000 Artikel verkaufen lassen?

Aufgabe 6: Stauwasser

Ein Gebirgsbach mit einem Volumenstrom von 1000 m^3 pro Tag wird durch einen Erdbeben auf einer flachen Wiese zu einem kleinen Teich gestaut. Pro Tag versickern 40 % des gestauten Wassers in der Wiese.

- Zeige, dass die Entwicklung der gestauten Wassermenge dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an
- Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass die Wiese zum Zeitpunkt des Erdbebens trocken war.
- Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass sich auf der Wiese zum Zeitpunkt des Erdbebens durch einen Regenguss schon 1000 m^3 Wasser gesammelt hatten.
- Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass sich auf der Wiese zum Zeitpunkt des Erdbebens durch einen Regenguss schon 3000 m^3 Wasser gesammelt hatten.

Aufgabe 7: Karpfenteich

Für die Zucht von Karpfen sind flache und großflächige Gewässer geeignet. Da an heißen Tagen ein Teil des Wassers verdunstet, muss laufend frisches Wasser zugeführt werden. Bei einem 7000 m^2 großen und durchschnittlich 80 cm tiefen Teich verdunsten an einem Tag 0,5 % des Wassers.

- Wie viel Kubikmeter Wasser müssen zum Ausgleich zugeführt werden?
- An jedem Abend werden 30 m^3 zugeführt. Bestimme die Wassermenge nach 10 Tagen sowie auf lange Sicht.

Aufgabe 8: Tropfinfusion

Bei Tropfinfusionen werden dem Blut des Patienten Medikamente gleichmäßig zugeführt. In einer Klinik werden über eine Tropfinfusion pro Minute 3,2 mg eines Medikaments verabreicht, das bislang im Körper nicht vorhanden war. Andererseits werden über die Nieren pro Minute 8 % der aktuell im Blut vorhandenen Menge dieses Medikaments ausgeschieden. Zu Beginn der Behandlung bekommt der Patient durch eine Spritze 20 mg des Medikaments verabreicht.

- Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Situation um beschränktes Wachstum handelt. (3)
- Bestimmen Sie eine Funktion, die den Verlauf dieses beschränkten Wachstums beschreibt. (3)
- Mit welcher Menge des Medikaments ist bei einer längeren Behandlung des Patienten in seinem Körper zu rechnen? (1)

Aufgabe 9: Bevölkerungsentwicklung

In einem Land mit 78 Millionen Einwohnern kommen auf 1000 Einwohnern 9 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Jedes Jahr wandern durchschnittlich 40 000 Personen aus und 180 000 Personen ein.

- Beschreiben Sie die Entwicklung der Bevölkerungszahl durch eine Differenzialgleichung. Mit welcher Bevölkerungszahl ist langfristig zu rechnen?
- Beschreiben Sie die Entwicklung der Bevölkerungszahl durch eine Funktionsgleichung. Wie viele Einwohner gibt es nach 5 Jahren?
- Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung aus b) eine Lösung der Differenzialgleichung aus a) ist.

5.6. Lösungen zu den Aufgaben zum exponentiellen und beschränkten Wachstum

Aufgabe 1: Radioaktive Strahlung

Es sei t die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn und $M(t)$ die Masse des Präparates zur Zeit t in g. Dann ist $M'(t) = -0,02 \cdot M(t)$ mit der Lösung $M(t) = 5 \cdot 0,98^t \approx 5 \cdot e^{-0,0202t}$.

Aufgabe 2: Bakterienkultur

Es sei t die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn und $A(t)$ die Fläche der Bakterienkultur zur Zeit t in cm^2 . Dann ist $A'(t) = 0,02 \cdot A(t)$ mit der Lösung $A(t) = 5 \cdot 1,02^t = 5 \cdot e^{0,0202t}$.

Aufgabe 3: Baumschäden

$B'(t) = k \cdot [S - B(t)]$ mit $S = 10\,000$ und $B(0) = 0$. Durch Einsetzen und Integrieren erhält man $B(t) = 10\,000 - 10\,000e^{-kt}$ mit $B(1) = 800 \Rightarrow k = \ln\left(\frac{10000}{9200}\right) \approx 0,083$. Nach 5 Jahren sind also $B(5) = 10\,000 \cdot (1 - 0,92^5) = 3409$ Bäume erkrankt.

Aufgabe 4: Pilzkultur

Es sei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn und $B(t)$ die zur Zeit t **zusätzlich** bedeckte Fläche in cm^2 . Dann ist $B'(t) = k \cdot [S - B(t)] = k \cdot S - k \cdot B(t) = 10 - 0,25 \cdot B(t)$. Durch Vergleich erhält man $k = 0,25$ und $k \cdot S = 10 \Rightarrow S = \frac{10}{k} = 40$. Mit $B(0) = 0$ ergibt sich durch Integration $B(t) = 40 - 40 \cdot e^{-0,25t}$. Es sind also zu Beginn nur noch 40 von 60 cm^2 übrig. Zu Beginn der Beobachtung waren also bereits 20 cm^2 bedeckt. Nach 3 Tagen waren es zusätzlich $B(3) \approx 21,1 \text{ cm}^2$ und insgesamt 41,1 cm^2 .

Aufgabe 5: Marktsättigung

- Bei gleich bleibendem Kaufanreiz wird die relative Zunahme $Z'(t)$ der verkauften Geräte proportional zur Zahl $100\,000 - Z(t)$ der potentiellen Käufer in diesem Jahr sein.
- Es sei t die Zeit in Monaten nach Verkaufsbeginn und $Z(t)$ die Zahl der nach t Monaten insgesamt verkauften Geräte. Dann ist $Z'(t) = k \cdot [S - Z(t)]$ mit $S = 100\,000$.
- Durch Integration erhält man $Z(t) = 100\,000 - 100\,000 \cdot e^{-kt}$ mit $Z(1) = 20\,000$. Durch Einsetzen ergibt sich $k = \ln\left(\frac{100000}{80000}\right) \approx 0,223$. Nach 6 Monaten sind also voraussichtlich $Z(6) = 100\,000 \cdot (1 - 0,8^6) = 73\,787$ Geräte verkauft.

Aufgabe 6: Stauwasser

Die tägliche Änderung des Volumens $V(t)$ in m^3 nach t Tagen ist $V'(t) = k \cdot [S - V(t)] = k \cdot S - k \cdot V(t) = 1000 - 0,4 \cdot V(t)$. Durch Vergleich bestimmt man $k = 0,4$ und $S = \frac{1000}{0,4} = 2500$.

- Für den Fall der anfänglich trockenen Wiese mit $V(0) = 0$ ergibt sich $V(t) = 2500 - 2500 \cdot e^{-0,4t}$ und $V(5) \approx 2162 \text{ m}^3$.
- Für den Fall der anfänglich feuchten Wiese mit $V(0) = 1000$ ergibt sich $V(t) = 2500 - 1500 \cdot e^{-0,4t}$ und $V(5) \approx 2297 \text{ m}^3$.
- Für den Fall der anfänglich feuchten Wiese mit $V(0) = 5000$ ergibt sich $V(t) = 2500 + 2500 \cdot e^{-0,4t}$ und $V(5) \approx 2838 \text{ m}^3$. (beschränkte Abnahme!)

Aufgabe 7: Karpenteich

- Das Gesamtvolumen beträgt $V(0) = 7000 \text{ m}^2 \cdot 0,8 \text{ m} = 5600 \text{ m}^3$. Davon verdunsten täglich $0,005 \cdot 5600 = 28 \text{ m}^3$ und diese Menge würde zum Ausgleich reichen.
- Die tägliche Änderung $V'(t)$ in m^3 nach t Tagen beträgt $V'(t) = k \cdot [S - V(t)] = k \cdot S - k \cdot V(t) = 30 - 0,005 \cdot V(t)$. Durch Vergleich erhält man $k = 0,005$ und $S = \frac{30}{0,005} = 6000$, d.h. auf lange Sicht wird das Volumen auf 6000 m^3 ansteigen. Durch Integration mit $V(0) = 5600$ erhält man $V(t) = 6000 - 400 \cdot e^{-0,005t}$ und $V(10) \approx 5620 \text{ m}^3$.

Aufgabe 8: Tropfinfusion

- Es sei t die seit Beginn der Verhandlung vergangene Zeit in Minuten und $B(t)$ der Gehalt des Medikamentes im Blut in mg. Dann gilt $B'(t) = 3,2 - 0,08 \cdot B(t)$. Diese DGL beschreibt ein beschränktes Wachstum.
- Ausklammern des Wachstumsfaktors ergibt $B'(t) = 0,08 \cdot (40 - B(t)) \Rightarrow k = 0,08$ und $S = 40$. Mit $B(0) = 20$ erhält man die Lösung der DGL $B(t) = S - [S - B(0)] \cdot e^{-kt} = 40 - 20 \cdot e^{-0,08t}$.
- Aus b) ergibt sich $B(t) \rightarrow S = 40 \text{ mg}$ für $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 10: Bevölkerungsentwicklung

- $B'(t) = 140\,000 - 0,002 \cdot B(t) = 0,002 \cdot [70\,000\,000 - B(t)] \Rightarrow$ Beschränkte Abnahme mit $B(0) = 78\,000\,000$ und Sättigungsgrenze $S = 70\,000\,000$.
- $B(t) = S - [S - B(0)] \cdot e^{-0,002t}$ mit t in Jahren $\Rightarrow B(5) = 77\,920\,398$.
- $B'(t) = 0,002 \cdot [S - B(t)] = 0,002 \cdot [S - B(t)]$