5.6. Aufgaben zu Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Einteilung von Differentialgleichungen
Untersuche die folgenden Differentialgleichungen auf Ordnung und Linearität

a) $y'(x) = -(y(x))^2 + 2y(x) - 4$
b) $y''(x) = -y'(x) + 2\,y(x)$
c) $0 = (y''(x))^2 - 3\,y(x)$
d) $y'(x) = 0{,}02 \cdot y(x) \cdot (5 - y(x))$

Aufgabe 2: Trennung der Variablen
Gib die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu dem gegebenen Anfangswert an und überprüfe durch Einsetzen:

a) $y'(t) = x \cdot y(t)$ mit $y(0) = 1$
b) $y(t) = x \cdot y'(t)$ mit $y(1) = 2$
c) $y'(t) = -x \cdot (y(t))^2$ mit $y(1) = 2$
d) $x = y(t) \cdot y'(t)$ mit $y(0) = 2$
e) $y'(t) \cdot y(t) = t^2 + 3$ mit $y(0) = 0$
f) $y'(t) = 0{,}2 \cdot y(t)$ mit $y(0) = 1$
g) $y'(t) = -0{,}1 \cdot y(t)$ mit $y(0) = 2$
h) $y'(t) = 0{,}2 \cdot [10 - y(t)]$ mit $y(0) = 2$
i) $y'(t) = 0{,}001 \cdot y(t) \cdot [10 - y(t)]$ mit $y(0) = 1$
j) $y''(t) = -\omega^2 \cdot y(t)$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$
Ansatz: $y(t) = a \cdot \cos(bt)$

Aufgabe 3: Radioaktive Strahlung
Durch den teilweisen Zerfall der strahlenden Substanz verringert sich die Stärke einer radioaktiven Strahlungsquelle mit der Zeit. Die **Änderung** dI der **Intensität** I ist für sehr kurze **Zeitspannen** dt proportional zu I und zu dt:
$dI = -\lambda \cdot dt \cdot I$.
Die Proportionalitätskonstante λ nennt man **Zerfallskonstante** der strahlenden Substanz. Die **relative Intensitätsänderung** ist also

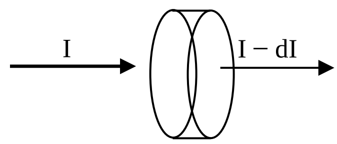
Isotop	**λ/d^{-1}**
^{137}Cs	0,023
^{131}J	0,085
^{226}Ra	$1{,}186 \cdot 10^{-6}$
^{238}U	$4{,}316 \cdot 10^{-13}$

$$I'(t) = \frac{dI}{dt} = -\lambda \cdot I(t).$$

Geben Sie die Lösung I(t) für die nebenstehenden Isotope zu gegebenem Anfangswert I(0) = 100 an und berechnen Sie ihre **Halbwertszeiten** $t_{1/2}$ (= Zeit, nach der I auf die Hälfte abgesunken ist).

Aufgabe 4: Lambert-Beer-Gesetz
Elektromagnetische Strahlen wie z.B. Licht, Röntgen- oder γ-Strahlung wandeln sich beim Durchgang durch Materie in andere Energieformen (größtenteils Wärme) um und werden dabei abgeschwächt. Die **Änderung** dI der **Intensität** I ist für sehr kurze **Wegspannen** dx proportional zu I und zu dx:

$$dI = -\beta \cdot dx \cdot I.$$



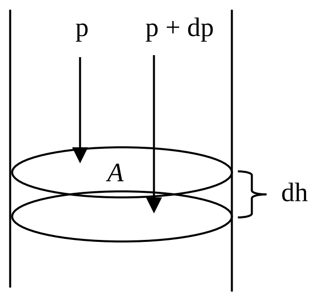
Die Proportionalitätskonstante β nennt man **Absorptionskoeffizientn** des absorbierenden Mediums. Die **relative Intensitätsänderung** ist also

$$I'(x) = \frac{dI}{dx} = -\beta \cdot I(x)$$

Beim Arzt werden Röntgenstrahlen je nach Körperteil bzw. Schichtdicke mit einer Intensität von 50 - 500 keV (Kiloelektronenvolt) benutzt. Der Absorptionskoeffizient von Blei für Röntgenstrahlung mit 124 keV ist $\beta = 43{,}2$ cm^{-1}. Wie dick muss eine Bleiweste sein, die 99 % dieser Strahlung absorbieren soll?

λ/nm	E/k.eV	β/cm^{-1}	Anwendung
0,1	12,4	853,5	
0,05	24,8	614,5	Fernsehröhre
0,01	124,0	43,2	Röntgenapparat

Aufgabe 5: Barometrische Höhenformel für den Luftdruck
Der **Druck** $p = \frac{F_g}{A}$ in der Höhe h kommt durch die auf der Fläche A lastende **Gewichtskraft** $F_g = m \cdot g$ der darüberstehenden **Luftsäule** mit der **Masse** m zustande. $g = 9{,}81\ m/s^2$ ist die **Schwerebeschleunigung**. Da die Luftsäule (theoretisch) unendlich hoch ist und ihre **Dichte** $\rho(h)$ mit steigender Höhe h abnimmt, lässt sich ihre Masse nicht direkt aus $m = \rho \cdot V$ berechnen. Schneidet man in der Höhe h eine sehr dünne Scheibe der Dicke dh aus dieser Luftsäule aus, so lassen sich ihre Dichte $\rho(h)$ und ihr Volumen $dV = A \cdot dh$ berechnen und ihre Masse ist $dm = \rho(h) \cdot dV = \rho(h) \cdot A \cdot dh$.



Der Druck ändert sich also in der Höhe h durch den Fortfall dieser Scheibe um

$$dp = \frac{dF_G}{A} = \frac{dm \cdot g}{A} = -\rho(h) \cdot g \cdot dh.$$

Die **relative Druckänderung** ist damit

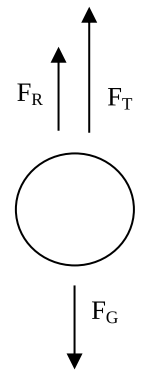
$$p'(h) = \frac{dp}{dh} = -\rho(h) \cdot g.$$

Die **Dichte** ρ(h) der Luft ist bei T = 300 K nach dem **allgemeinen Gasgesetz** aber wiederum proportional zum Druck:

$$\rho(h) = c\cdot p(h) \text{ mit } c = 1{,}15\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3\cdot\text{bar}} = 1{,}15\cdot 10^{-5}\ \text{s}^2$$

Bestimmen Sie die Formel für den Luftdruck p(h) in der Höhe h unter der Annahme p(0) = 1 bar. Wie groß ist der Luftdruck in 1000 m und in 8000 m Höhe?

Aufgabe 6: Stokes-Gesetz für Reibungswiderstand einer Kugel bei laminarer Strömung

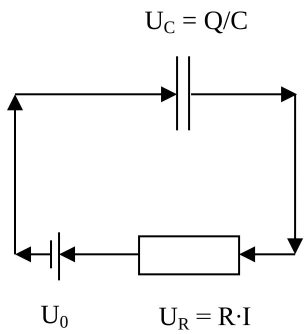


Eine Kugel aus einem Material der Dicht ρ mit dem Radius r hat das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und die Masse m = ρV. Sie wird durch die **Gewichtskraft** $F_G = m\cdot g$ mit $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ nach unten gezogen. Infolge ihrer Massenträgheit wirkt in entgegen gesetzte Richtung die **Trägheitskraft** $F_T = -m\cdot a(t) = -m\cdot v'(t)$. In einer Flüssigkeit mit der **Viskosität** η wirkt außerdem die **Reibungskraft** $F_R = -6\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v(t)$. Insgesamt müssen sich alle drei Kräfte ausgleichen: $F_G + F_T + F_R = 0$. Setzt man die obigen Beziehungen in die Kräftebilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen** der **Sinkgeschwindigkeit** v(t) beschreibt. Bestimme die Sinkgeschwindigkeit v(t) einer 10 cm dicken Stahlkugel mit der **Dichte** ρ = 7,8 g/cm³, die in Wasser mit η = 1 Ns/m² versinkt.

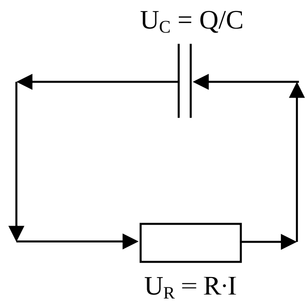
Aufgabe 7: Laden und Entladen von Kondensatoren

Bei einem Kondensator ist das Verhältnis der **aufgenommenen Ladung** Q zur **angelegten Spannung** U_C konstant und wird **Kapazität** $C = \frac{Q}{U_C}$ genannt.

Beim **Laden** müssen nicht nur die Ladespannung $U_c = -\frac{Q}{C}$ des Kondensators, sondern auch der **Innenwiderstand** R_i der Spannungsquelle überwunden werden. Ihre **maximale Klemmenspannung** U_0 wird nur erreicht, wenn kein Strom fließt. Sobald der **Ladestrom** I(t) fließt, verringert sich die Klemmenspannung um den Betrag $U_i(t) = -R_i\cdot I(t)$. Die **Stromstärke** I(t) beschreibt die Änderung der Ladung pro Zeit: I(t) = Q'(t). Insgesamt müssen sich alle auftretenden Spannungen im Stromkreis aufheben: $U_0 + U_C(t) + U_i(t) = 0$. Setzt man alle obigen Beziehungen in die Spannungsbilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen** der **Ladung** Q(t) beschreibt. Berechne die Ladung Q(t) und den Ladestrom I(t) für einen Kondensator mit C = 0,2 F und eine Spannungsquelle mit U_0 = 25 V und R_i = 5 Ω. Wie lange dauert es, bis eine Ladung von 4,9 C erreicht ist?



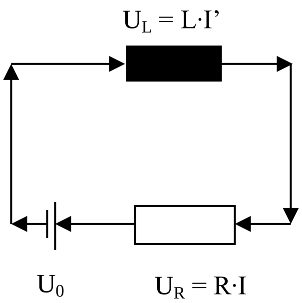
Beim **Entladen** entfällt die Klemmspannung (U_0 = 0) und die Ladung fließt in umgekehrter Richtung wieder zurück. Diesmal ergibt sich eine exponentielle Abnahme für Q(t). Berechne Q(t) und I(t) für die obigen Zahlenangaben. Wie lange dauert es, bis nur noch 0,1 C vorhanden sind?



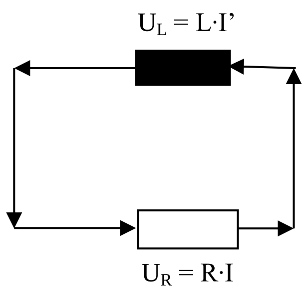
Aufgabe 8: Induktionsstrom bei Spulen

Bei einer Spule ist das Verhältnis aus **induzierter Spannung** U_{ind} zur **Stromänderung** I'(t) konstant und wird **Induktivität** $L = -\frac{U_{ind}}{I'}$ genannt.

Beim **Anschalten** der Spannungsquelle muss nicht nur die Induktionsspannung $U_{ind} = -L\cdot I'(t)$ der Spule, sondern auch der **Innenwiderstand** R_i der Spannungsquelle überwunden werden. Ihre **maximale Klemmenspannung** U_0 wird nur erreicht, wenn kein Strom fließt. Sobald der **Strom** I(t) fließt, verringert sich die Klemmenspannung um den Betrag $U_i(t) = -R_i\cdot I(t)$. Insgesamt müssen sich alle auftretenden Spannungen im Stromkreis aufheben: $U_0 + U_{ind}(t) + U_i(t) = 0$. Setzt man alle obigen Beziehungen in die Spannungsbilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen** des **Stromes** I(t) beschreibt. Berechne den Strom I(t) für eine Spule mit L = 5 H und eine Spannungsquelle mit U_0 = 25 V und R_i = 5 Ω. Wie lange dauert es, bis ein Strom von 4,9 A erreicht ist?



Beim **Abschalten** der Spannungsquelle entfällt die Klemmspannung (U_0 = 0) und die plötzliche Abnahme des Stromes induziert eine Spannung $U_{ind}(t)$, die einen gedämpften (=exponentiell abnehmenden) Strom I(t) zur Folge hat. Berechne I(t) für die obigen Zahlenangaben. Wie lange dauert es, bis nur noch 0,1 A fließen?

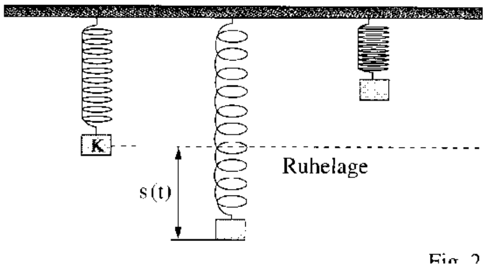


Aufgabe 9: Bakterienkolonie

Eine Bakterienkolonie in einer 80 cm^2 großen Petrischale bedeckt zur Zeit t = 0 Minuten eine Fläche B(0) = 1 cm^2. Die Wachstumsrate B'(t) ist proportional zur schon bedeckten Fläche B(t) und zum noch zur Verfügung stehenden Platz in der Petrischale. Bei einer bedeckten Fläche von 40 cm^2 wurde eine Wachstumsrate von 0,16 cm^2/min festgestellt. Wieviele Minuten nach Ansetzen der Kultur fand diese Untersuchung statt? Wieviel cm^2 wurden nach 24 h erreicht?

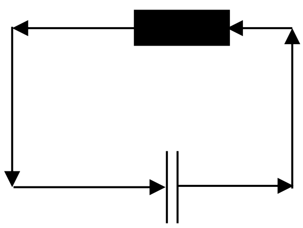
Aufgabe 10: mechanische Schwingung

Ein Gewicht der **Masse** m hängt an einer Feder mit der **Federkonstante** D. Ist es um die Strecke s aus seiner Ruhelage entfernt, so wirkt die **Rückstellkraft** $F_D = -D \cdot s(t)$. Dabei erfährt das Gewicht eine Beschleunigung $a = s''(t)$, die die Trägheitskraft $F_m = -ma = -m \cdot s''(t)$ zur Folge hat. Insgesamt muss $F_D + F_m = 0$ gelten. Bestimme die Periodendauer und die Frequenz der Schwingung, die entsteht, wenn man ein Gewicht der Masse m = 0,1 kg an einer Feder mit D = 0,1 N/cm = 10 N/m um s_0 = 1 cm aus seiner Ruhelage entfernt und dann loslässt.



Aufgabe 11: elektrischer Schwingkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C und eine Spule mit der Induktivität L werden durch supraleitende Kabel miteinander verbunden, so dass R = 0. Der Kondensator wird durch eine außen angelegte Spannungsquelle auf die Ladung $Q = C \cdot U_0$ gebracht. Nachdem die Spannungsquelle wieder entfernt wurde, fließt die Ladung über die Spule wieder zurück und erzeugt dabei eine Induktionsspannung $U_{ind} = L \cdot I'(t) = L \cdot Q''(t)$. Die Spannung am Kondensator ist dabei $U_C = \dfrac{Q}{C}$. Insgesamt muss $U_{ind} + U_C = 0$ gelten. Bestimme die Periodendauer und die Frequenz der Schwingung, die entsteht, wenn man ein Kondensator der Kapazität C = 10 F mit einer Spule mit L = 5 H mit U_0 = 10 V aufgeladen und dann abgeklemmt wurde.



5.6. Lösungen zu den Aufgaben zu Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Einteilung von Differentialgleichungen

a) nichtlineare DGL 1. Ordnung
b) lineare DGL 2. Ordnung
c) nichtlineare DGL 2. Ordnung
d) nichtlineare DGL 1. Ordnung

Aufgabe 2: Trennung der Variablen

a) $y(t) = \exp(\frac{1}{2}t^2)$
b) $y(t) = 2t$ (Lineares Wachtum)
c) $y(t) = \frac{2}{t^2}$
d) $y(t) = \sqrt{t^2 + 4}$
e) $y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 6t}$
f) $y(t) = e^{0,2t}$
g) $y(t) = 2 \cdot e^{-0,1t}$ (Exponentielles Wachstum)
h) $y(t) = 10 - 8 \cdot e^{-0,2t}$ (Beschränktes Wachstum)
i) $y(t) = \frac{10}{9 \cdot e^{-0,01t} + 1}$ (Logistische Wachstum)
j) $y(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ mit

Aufgabe 3: Radioaktive Strahlung

$I(t) = 100 \cdot \exp(-\lambda t)$ mit t in Tagen. Halbwertszeit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 30$ Tage für ^{137}Cs, 8,1 Tage für ^{131}J, 584441,1 Tage = 1601 Jahre für ^{226}Ra und $1{,}6 \cdot 10^{12}$ Tage = 4,4 Milliarden Jahre für ^{238}U

Aufgabe 4: Lambert-Beer-Gesetz

$I(x) = 124 \cdot \exp(-43{,}2 \cdot x)$ mit I in keV und x in cm. $I(x) = 0{,}99 \cdot 124 \Rightarrow 0{,}99 = \exp(-43{,}2 \cdot x) \Rightarrow x = -\frac{\ln 0,99}{43,2} = 0{,}000\,23$ cm (!)

Aufgabe 5: Barometrische Höhenformel für den Luftdruck

$p(h) = p(0) \cdot \exp(-c \cdot g \cdot h) = \exp(-11{,}28 \cdot 10^{-5} \cdot x)$ mit p un bar und x in m $\Rightarrow$ p(1000 m) = exp(−0,1128) bar ≈ 0,89 bar und p(8000 m) = 0,41 bar.

Aufgabe 6: Stokes-Gesetz für Reibungswiderstand einer Kugel bei laminarer Strömung

Der Radius der Stahlkugel ist r = 5 cm $\Rightarrow$ Masse $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}08$ kg. $F_G + F_T + F_R = 0 \Rightarrow m \cdot g - m \cdot v'(t) - 6 \cdot \pi \cdot \eta\, r \cdot v(t) = 0 \Rightarrow v'(t) = g - \frac{6\pi \cdot \eta \cdot r}{m} v(t) = 9{,}81$ m/s^2 $- 23{,}07$ 1/s·v(t) mit v in m/s und t in s $\Rightarrow v(t) = \frac{m \cdot g}{6\pi \cdot \eta \cdot r}\left(1 - \exp\left(-\frac{6\pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot t\right)\right) = 0{,}42(1 - \exp(-23{,}07 \cdot t))$ mit v in m/s und t in s $\Rightarrow$ Sinkgeschwindigkeit 0,42 m/s

Aufgabe 7: Laden und Entladen von Kondensatoren (alles in SI)

Ladevorgang (beschränktes Wachstum): $U_0 + U_C(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow U_0 - \frac{Q(t)}{C} - R_i \cdot Q'(t) = 0 \Rightarrow Q'(t) = \frac{U_0}{R_i} - \frac{Q(t)}{R_i \cdot C} = 5 - Q(t) \Leftrightarrow Q(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$ C $\Leftrightarrow I(t) = Q'(t) = 5 \cdot e^{-t}$ A. 4,9 C = Q(t) $\Rightarrow t = \ln(50) \approx 3{,}91$ s

Entladevorgang (exponentielle Abnahme): $U_C(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow -\frac{Q(t)}{C} - R_i \cdot Q'(t) = 0 \Rightarrow Q'(t) = -\frac{Q(t)}{R_i \cdot C} = -Q(t) \Leftrightarrow Q(t) = 5 \cdot e^{-t}$ C $\Leftrightarrow I(t) = Q'(t) = -5 \cdot e^{-t}$ A. 0,1 C = Q(t) $\Rightarrow t = \ln(50) \approx 3{,}91$ s

Aufgabe 8: Anschalten und Abschalten von Spulen (alles in SI)

Anschalten (beschränktes Wachstum): $U_0 + U_{ind}(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow U_0 - L \cdot I'(t) - R_i \cdot I(t) = 0 \Rightarrow I'(t) = \frac{U_0}{L} - \frac{R_i}{L} I(t) = 5 - I(t) \Leftrightarrow I(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$. 4,9 A = I(t) $\Rightarrow t = \ln(50) \approx 3{,}91$ s

Abschalten (exponentielle Abnahme(: $U_{ind}(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow -L \cdot I'(t) - R_i \cdot I(t) = 0 \Rightarrow I'(t) = -\frac{R_i}{L} I(t) = -5\, I(t) \Leftrightarrow I(t) = 5 \cdot e^{-t} \Leftrightarrow$ 0,1 A = I(t) $\Rightarrow t = \ln(50) \approx 3{,}91$ s

Aufgabe 9: Bakterienkolonie

Logistisches Wachstum: B'(t) = k·B(t)·[S − B(t)] mit S = 80 und 0,16 = k·40·[80 − 40] ⇒ k = 0,000 1 ⇔ B(t) = $\frac{B(0)\cdot S}{S - B(0)\ e^{-Skt} + B(0)} = \frac{80}{79e^{-0,008t} + 1}$ mit B in cm^2 und t in Minuten ⇔ B(24 h) = B(1440 min) = 79,9 cm^2 und 40 = B(t) ⇒ $79\cdot e^{-0,008t} + 1 = 2$ ⇒ $t = -\frac{\ln 79}{0,008}$ = 546 Minuten = 9,1 Stunden nach dem Ansetzen der Kultur.

Aufgabe 10: mechanische Schwingung

$F_D + F_m = 0$ ⇒ m·s''(t) = −D·s(t) ⇒ $s''(t) = -\frac{D}{m} s(t)$ ⇔ $s(t) = A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)$ = mit Amplitude A = s(0) = 1 cm, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ = 10 s^{-1}, Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ≈ 1,59 s^{-1} und Periodendauer $T = \frac{1}{f}$ = 0,63 s.

Aufgabe 11: elektrischer Schwingkreis

$U_{ind} + U_C = 0$ ⇒ $L\cdot Q''(t) = -\frac{1}{C}\cdot Q(t)$ ⇒ $Q''(t) = -\frac{1}{LC} Q(t)$ ⇔ $s(t) = A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\cdot t\right)$ = mit Amplitude A = Q(0) = $U_0\cdot C$ = 100 As, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ = 0,14 s^{-1}, Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ≈ 0,022 s^{-1} und Periodendauer $T = \frac{1}{f}$ = 44,4 s.