

5.6. Aufgaben zu Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Einteilung von Differentialgleichungen

Untersuche die folgenden Differentialgleichungen auf Ordnung und Linearität

- a) $y'(x) = -(y(x))^2 + 2y(x) - 4$ c) $0 = (y''(x))^2 - 3y(x)$
 b) $y''(x) = -y'(x) + 2y(x)$ d) $y'(x) = 0,02 \cdot y(x) \cdot (5 - y(x))$

Aufgabe 2: Trennung der Variablen

Gib die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu dem gegebenen Anfangswert an und überprüfe durch Einsetzen:

- a) $y'(x) = x \cdot y(x)$ mit $y(0) = 1$ f) $y'(x) = 0,2 \cdot y(x)$ mit $y(0) = 1$
 b) $y(x) = x \cdot y'(x)$ mit $y(1) = 2$ g) $y'(x) = -0,1 \cdot y(x)$ mit $y(0) = 2$
 c) $y'(x) = -x \cdot (y(x))^2$ mit $y(1) = 2$ h) $y'(x) = 0,2 \cdot [10 - y(x)]$ mit $y(0) = 2$
 d) $x = y(x) \cdot y'(x)$ mit $y(0) = 2$ i) $y'(x) = 0,001 \cdot y(x) \cdot [10 - y(x)]$ mit $y(0) = 1$
 e) $y'(x) \cdot y(x) = x^2 + 3$ mit $y(0) = 0$ j) $y'(x) = -\omega^2 \cdot y(x)$ mit $y(0) = 2$
 (Ansatz: $y(x) = A \cdot \sin[b(x - c)]$)

Aufgabe 3: Radioaktive Strahlung

Durch den teilweisen Zerfall der strahlenden Substanz verringert sich die Stärke einer radioaktiven Strahlungsquelle mit der Zeit. Die **Änderung** dI der **Intensität** I ist für sehr kurze **Zeitspannen** dt proportional zu I und zu dt :

$$dI = -\lambda \cdot dt \cdot I.$$

Die Proportionalitätskonstante λ nennt man **Zerfallskonstante** der strahlenden Substanz. Die **relative Intensitätsänderung** ist also

$$I'(t) = \frac{dI}{dt} = -\lambda \cdot I(t).$$

Geben Sie die Lösung $I(t)$ für die nebenstehenden Isotope zu gegebenem Anfangswert $I(0) = 100$ an und berechnen Sie ihre **Halbwertszeiten** $t_{1/2}$ (= Zeit, nach der I auf die Hälfte abgesunken ist).

Isotop	λ/d^{-1}
^{137}Cs	0,023
^{131}J	0,085
^{226}Ra	$1,186 \cdot 10^{-6}$
^{238}U	$4,316 \cdot 10^{-13}$

Aufgabe 4: Lambert-Beer-Gesetz

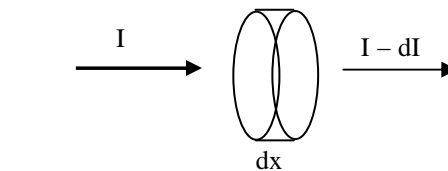
Elektromagnetische Strahlen wie z.B. Licht, Röntgen- oder γ -Strahlung wandeln sich beim Durchgang durch Materie in andere Energieformen (größtenteils Wärme) um und werden dabei abgeschwächt. Die **Änderung** dI der **Intensität** I ist für sehr kurze **Wegspannen** dx proportional zu I und zu dx :

$$dI = -\beta \cdot dx \cdot I.$$

Die Proportionalitätskonstante β nennt man **Absorptionskoeffizient** des absorbierenden Mediums. Die **relative Intensitätsänderung** ist also

$$I'(x) = \frac{dI}{dx} = -\beta \cdot I(x)$$

Beim Arzt werden Röntgenstrahlen je nach Körperteil bzw. Schichtdicke mit einer Intensität von 50 - 500 keV (Kiloelektronenvolt) benutzt. Der Absorptionskoeffizient von Blei für Röntgenstrahlung mit 124 keV ist $\beta = 43,2 \text{ cm}^{-1}$. Wie dick muss eine Bleiweste sein, die 99 % dieser Strahlung absorbieren soll?



λ/nm	$E/\text{k.eV}$	β/cm^{-1}	Anwendung
0,1	12,4	853,5	
0,05	24,8	614,5	Fernsehröhre
0,01	124,0	43,2	Röntgenapparat

Aufgabe 5: Barometrische Höhenformel für den Luftdruck

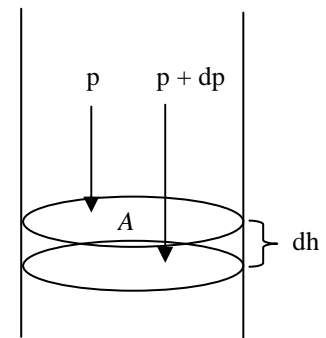
Der **Druck** $p = \frac{F_g}{A}$ in der Höhe h kommt durch die auf der Fläche A

lastende **Gewichtskraft** $F_g = m \cdot g$ der darüberstehenden **Luftsäule** mit der **Masse** m zustande. $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ist die **Schwerebeschleunigung**. Da die Luftsäule (theoretisch) unendlich hoch ist und ihre **Dichte** $\rho(h)$ mit steigender Höhe h abnimmt, lässt sich ihre Masse nicht direkt aus $m = \rho \cdot V$ berechnen. Schneidet man in der Höhe h eine sehr dünne Scheibe der Dicke dh aus dieser Luftsäule aus, so lassen sich ihre Dichte $\rho(h)$ und ihr Volumen $dV = A \cdot dh$ berechnen und ihre Masse ist $dm = \rho(h) \cdot dV = \rho(h) \cdot A \cdot dh$.

Der Druck ändert sich also in der Höhe h durch den Fortfall dieser Scheibe

$$\text{um } dp = \frac{dF_G}{A} = \frac{dm \cdot g}{A} = -\rho(h) \cdot g \cdot dh.$$

Die **relative Druckänderung** ist damit



$$p'(h) = \frac{dp}{dh} = -\rho(h) \cdot g.$$

Die **Dichte** $\rho(h)$ der Luft ist bei $T = 300 \text{ K}$ nach dem **allgemeinen Gasgesetz** aber wiederum proportional zum Druck:

$$\rho(h) = c \cdot p(h) \text{ mit } c = 1,15 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{bar}} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2$$

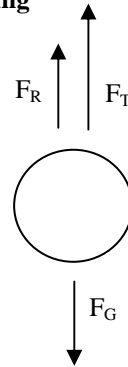
Bestimmen Sie die Formel für den Luftdruck $p(h)$ in der Höhe h unter der Annahme $p(0) = 1 \text{ bar}$. Wie groß ist der Luftdruck in 1000 m und in 8000 m Höhe?

Aufgabe 6: Stokes-Gesetz für Reibungswiderstand einer Kugel bei laminarer Strömung

Eine Kugel aus einem Material der Dichte ρ mit dem Radius r hat das Volumen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ und die Masse } m = \rho V. \text{ Sie wird durch die Gewichtskraft } F_G = m \cdot g$$

mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ nach unten gezogen. Infolge ihrer Massenträgheit wirkt in entgegen gesetzte Richtung die **Trägheitskraft** $F_T = -m \cdot a(t) = -m \cdot v'(t)$. In einer Flüssigkeit mit der **Viskosität** η wirkt außerdem die **Reibungskraft** $F_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v(t)$. Insgesamt müssen sich alle drei Kräfte ausgleichen: $F_G + F_T + F_R = 0$. Setzt man die obigen Beziehungen in die Kräftebilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen** der **Sinkgeschwindigkeit** $v(t)$ beschreibt. Bestimme die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ einer 10 cm dicken Stahlkugel mit der **Dichte** $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$, die in Wasser mit $\eta = 1 \text{ Ns/m}^2$ versinkt.



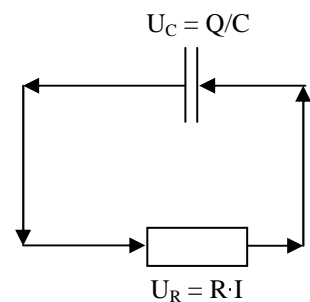
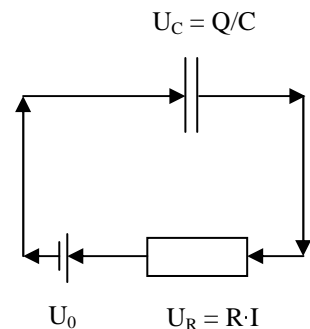
Aufgabe 7: Laden und Entladen von Kondensatoren

Bei einem Kondensator ist das Verhältnis der **aufgenommenen Ladung** $Q(t)$ in As zur **angelegten Spannung** $U_C(t)$ in V zu jeder Zeit t in s konstant

und wird **Kapazität** $C = \left| \frac{Q(t)}{U_C(t)} \right|$ genannt.

Beim **Laden** müssen nicht nur die bereits auf dem Kondensator sitzenden Ladungen $U_c = -C \cdot Q(t)$, sondern auch der **Innenwiderstand** R_i in $\Phi = \text{V/As}$ der Spannungsquelle überwunden werden. Ihre **maximale Klemmspannung** U_0 wird nur erreicht, wenn kein Strom fließt. Sobald der **Ladestrom** $I(t)$ fließt, verringert sich die Klemmspannung um den Betrag $U_i(t) = -R_i \cdot I(t)$. Die **Stromstärke** $I(t)$ beschreibt die Änderung der Ladung pro Zeit: $I(t) = Q'(t)$. Insgesamt müssen sich alle auftretenden Spannungen im Stromkreis aufheben: $U_0 + U_C(t) + U_i(t) = 0$. Setzt man alle obigen Beziehungen in die Spannungsbilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen** der **Ladung** $Q(t)$ beschreibt. Berechne die Ladung $Q(t)$ und den Ladestrom $I(t)$ für einen Kondensator mit $C = 5 \text{ As/V}$ und eine Spannungsquelle mit $U_0 = 25 \text{ V}$ und $R_i = 5 \text{ V/A}$. Wie lange dauert es, bis eine Ladung von 4,9 As erreicht ist?.

Beim **Entladen** entfällt die Klemmspannung ($U_0 = 0$) und die Ladung fließt in umgekehrter Richtung wieder zurück. Diesmal ergibt sich eine exponentielle Abnahme für $Q(t)$. Berechne $Q(t)$ und $I(t)$ für die obigen Zahlenangaben. Wie lange dauert es, bis nur noch 0,1 As vorhanden sind?

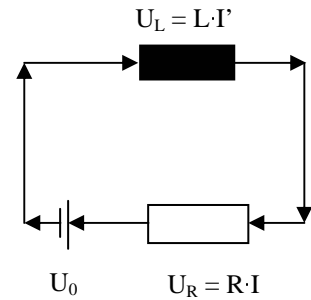


Aufgabe 8: Induktionsstrom bei Spulen

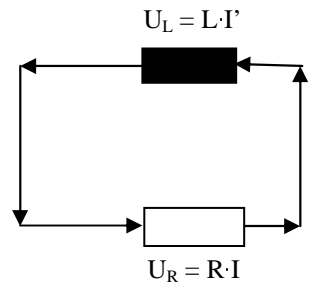
Bei einer Spule ist das Verhältnis aus **induzierter Spannung** $U_{\text{ind}}(t)$ in V zur **Stromänderung** $I'(t)$ in A/s zu jeder Zeit t in s konstant und wird

Induktivität $L = -\frac{U_{\text{ind}}(t)}{I'(t)}$ genannt.

Beim **Anschalten** der Spannungsquelle muß nicht nur die Induktionsspannung $U_{\text{ind}} = -L \cdot I'(t)$ der Spule, sondern auch der **Innenwiderstand** R_i in $\Omega = \text{V/As}$ der Spannungsquelle überwunden werden. Ihre **maximale Klemmspannung** U_0 wird nur erreicht, wenn kein Strom fließt. Sobald der **Strom** $I(t)$ fließt, verringert sich die Klemmspannung um den Betrag $U_i(t) = -R_i \cdot I(t)$. Insgesamt müssen sich alle auftretenden Spannungen im Stromkreis aufheben: $U_0 + U_{\text{ind}}(t) + U_i(t) = 0$. Setzt man alle obigen Beziehungen in die Spannungsbilanz ein, so erhält man eine **Differentialgleichung**, die das **beschränkte Anwachsen des Stromes** $I(t)$ beschreibt. Berechne den Strom $I(t)$ für eine Spule mit $L = 5 \text{ Vs/A}$ und eine Spannungsquelle mit $U_0 = 25 \text{ V}$ und $R_i = 5 \Omega$. Wie lange dauert es, bis ein Strom von 4,9 A erreicht ist?.



Beim **Abschalten** der Spannungsquelle entfällt die Klemmspannung ($U_0 = 0$) und die plötzliche Abnahme des Stromes induziert eine Spannung $U_{\text{ind}}(t)$, die einen gedämpften (=exponentiell abnehmenden) Strom $I(t)$ zur Folge hat. Berechne $I(t)$ für die obigen Zahlenangaben. Wie lange dauert es, bis nur noch 0,1 A fließen?



Aufgabe 9: Bakterienkolonie

Eine Bakterienkolonie in einer 80 cm^2 großen Petrischale bedeckt zur Zeit $t = 0$ Minuten eine Fläche $B(0) = 1 \text{ cm}^2$. Die Wachstumsrate $B'(t)$ ist proportional zur schon bedeckten Fläche $B(t)$ und zum noch zur Verfügung stehenden Platz in der Petrischale. Bei einer bedeckten Fläche von 40 cm^2 wurde eine Wachstumsrate von $0,16 \text{ cm}^2/\text{min}$ festgestellt. Wieviele Minuten nach Ansetzen der Kultur fand diese Untersuchung statt? Wieviel cm^2 wurden nach 24 h erreicht?

Aufgabe 10: mechanische Schwingung

Ein Gewicht der **Masse** m hängt an einer Feder mit der **Federkonstante** D . Ist es um die Strecke s aus seiner Ruhelage entfernt, so wirkt die **Rückstellkraft** $F_D = -D \cdot s(t)$. Dabei erfährt das Gewicht eine Beschleunigung $a = s''(t)$, die die Trägheitskraft $F_m = -ma = -m \cdot s''(t)$ zur Folge hat. Insgesamt muss $F_D + F_m = 0$ gelten. Bestimme die Periodendauer und die Frequenz der Schwingung, die entsteht, wenn man ein Gewicht der Masse $m = 0,1 \text{ kg}$ an einer Feder mit $D = 0,1 \text{ N/cm} = 10 \text{ N/m}$ um $s_0 = 1 \text{ cm}$ aus seiner Ruhelage entfernt und dann loslässt.

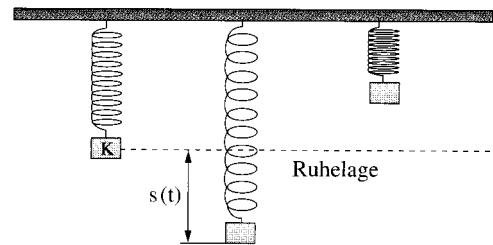
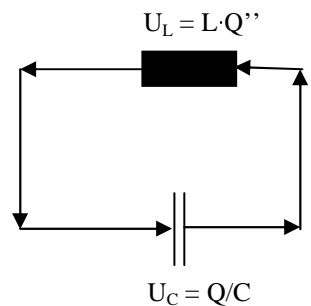


Fig. 2

Aufgabe 11: elektrischer Schwingkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C und eine Spule mit der Induktivität L werden durch supraleitende Kabel miteinander verbunden, so dass $R = 0$. Der Kondensator wird durch eine außen angelegte Spannungsquelle auf die Ladung $Q = C \cdot U_0$ gebracht. Nachdem die Spannungsquelle wieder entfernt wurde, fließt die Ladung über die Spule wieder zurück und erzeugt dabei eine Induktionsspannung $U_{\text{ind}} = L \cdot I'(t) = L \cdot Q''(t)$. Die Spannung am Kondensator ist dabei $U_C = \frac{Q}{C}$. Insgesamt muss $U_{\text{ind}} + U_C = 0$ gelten.

Bestimme die Periodendauer und die Frequenz der Schwingung, die entsteht, wenn man ein Kondensator der Kapazität $C = 10 \text{ AS/V}$ mit einer Spule mit $L = 5 \text{ Vs/A}$ mit $U_0 = 10 \text{ V}$ aufgeladen und dann abgeklemmt wurde.



5.6. Lösungen zu den Aufgaben zu Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Einteilung von Differentialgleichungen

- a) nichtlineare DGL 1. Ordnung c) nichtlineare DGL 2. Ordnung
 b) lineare DGL 2. Ordnung d) nichtlineare DGL 1. Ordnung

Aufgabe 2: Trennung der Variablen

- a) $y(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ f) $y(x) = \exp(0,2x)$
 b) $y(x) = 2x$ g) $y(x) = 2 \cdot \exp(-0,1x)$
 c) $y(x) = \frac{2}{x^2}$ h) $y(x) = 10 - 8 \cdot \exp(-0,2x)$
 d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ i) $y(x) = \frac{10}{9 \cdot e^{-0,01x} + 1}$
 e) $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 3x}$ j) $y(x) = 2 \cdot \cos(\omega x)$

Aufgabe 3: Radioaktive Strahlung

$I(t) = 100 \cdot \exp(-\lambda t)$ mit t in Tagen. Halbwertszeit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 30$ Tage für ^{137}Cs , 8,1 Tage für ^{131}I , 584441,1 Tage = 1601 Jahre für ^{226}Ra und $1,6 \cdot 10^{12}$ Tage = 4,4 Milliarden Jahre für ^{238}U

Aufgabe 4: Lambert-Beer-Gesetz

$I(x) = 124 \cdot \exp(-43,2 \cdot x)$ mit I in keV und x in cm. $I(x) = 0,99 \cdot 124 \Rightarrow 0,99 = \exp(-43,2 \cdot x) \Rightarrow x = -\frac{\ln 0,99}{43,2} = 0,00023$ cm (!)

Aufgabe 5: Barometrische Höhenformel für den Luftdruck

$p(h) = p(0) \cdot \exp(-c \cdot g \cdot h) = \exp(-11,28 \cdot 10^{-5} \cdot x)$ mit p in bar und x in m $\Rightarrow p(1000 \text{ m}) = \exp(-0,1128)$ bar $\approx 0,89$ bar und $p(8000 \text{ m}) = 0,41$ bar.

Aufgabe 6: Stokes-Gesetz für Reibungswiderstand einer Kugel bei laminarer Strömung

Der Radius der Stahlkugel ist $r = 5 \text{ cm} \Rightarrow$ Masse $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = 4,08 \text{ kg}$. $F_G + F_T + F_R = 0 \Rightarrow m \cdot g - m \cdot v'(t) - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v(t) = 0 \Rightarrow v'(t) = g - \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} v(t) = 9,81 \text{ m/s}^2 - 23,07 \text{ 1/s} \cdot v(t)$ mit v in m/s und t in s $\Rightarrow v(t) = \frac{m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} \left(1 - \exp\left(-\frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot t\right)\right) = 0,42(1 - \exp(-23,07 \cdot t))$ mit v in m/s und t in s \Rightarrow Sinkgeschwindigkeit 0,42 m/s

Aufgabe 7: Laden und Entladen von Kondensatoren

Ladevorgang: beschränktes Wachstum $U_0 + U_C(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow U_0 - C \cdot Q(t) - R_i \cdot Q'(t) = 0 \Rightarrow Q'(t) = \frac{U_0}{R_i} - \frac{C}{R_i} Q(t) = 5 \text{ A} - 1/\text{s} \cdot Q(t) \Leftrightarrow Q(t) = 5 \cdot (1 - \exp(-t))$ mit Q in As und t in s $\Leftrightarrow I(t) = Q'(t) = 5 \cdot \exp(-t)$ mit I in A und t in s. $4,9 \text{ As} = Q(t) \Rightarrow t = \ln 50 \approx 3,91 \text{ s}$

Entladevorgang: exponentielle Abnahme. $U_C(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow -C \cdot Q(t) - R_i \cdot Q'(t) = 0 \Rightarrow Q'(t) = -\frac{C}{R_i} Q(t) = -5 Q(t)$
 $Q(t) \Leftrightarrow Q(t) = 5 \cdot \exp(-t)$ mit Q in As und t in s $\Leftrightarrow I(t) = Q'(t) = -5 \cdot \exp(-t)$ mit I in A und t in s. $0,1 \text{ As} = Q(t) \Rightarrow t = \ln 50 \approx 3,91 \text{ s}$

Aufgabe 8: Induktionsstrom bei Spulen

Anschalten: beschränktes Wachstum: $U_0 + U_{\text{ind}}(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow U_0 - L \cdot I'(t) - R_i \cdot I(t) = 0 \Rightarrow I'(t) = \frac{U_0}{L} - \frac{R_i}{L} I(t) = 5 \text{ A/s} - 1/s \cdot I(t) \Leftrightarrow I(t) = 5 \cdot (1 - \exp(-t))$ mit I in A und t in s. $4,9 \text{ A} = I(t) \Rightarrow t = \ln 50 \approx 3,91 \text{ s}$

Abschalten: exponentielle Abnahme. $U_{\text{ind}}(t) + U_i(t) = 0 \Rightarrow -L \cdot I'(t) - R_i \cdot I(t) = 0 \Rightarrow I'(t) = -\frac{R_i}{L} I(t) = -5 I(t) \Leftrightarrow I(t) = 5 \cdot \exp(-t)$ mit I in A und t in s $\Leftrightarrow 0,1 \text{ A} = I(t) \Rightarrow t = \ln 50 \approx 3,91 \text{ s}$

Aufgabe 9: Bakterienkolonie

Logistisches Wachstum: $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$ mit $S = 80$ und $0,16 = k \cdot 40 \cdot [80 - 40] \Rightarrow k = 0,0001 \Leftrightarrow B(t) = \frac{B(0) \cdot S}{[S - B(0)] e^{-Skt} + B(0)} = \frac{80}{79e^{-0,008t} + 1}$ mit B in cm^2 und t in Minuten $\Leftrightarrow B(24 \text{ h}) = B(1440 \text{ min}) = 79,9 \text{ cm}^2$

und $40 = B(t) \Rightarrow 79 \cdot e^{-0,008t} + 1 = 2 \Rightarrow t = -\frac{\ln 79}{0,008} = 546 \text{ Minuten} = 9,1 \text{ Stunden}$ nach dem Ansetzen der Kultur.

Aufgabe 10: mechanische Schwingung

$F_D + F_m = 0 \Rightarrow m \cdot s''(t) = -D \cdot s(t) \Rightarrow s''(t) = -\frac{D}{m} s(t) \Leftrightarrow s(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$ mit Amplitude $A = s(0) = 1 \text{ cm}$,

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10 \text{ s}^{-1}$, Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,59 \text{ s}^{-1}$ und Periodendauer $T = \frac{1}{f} = 0,63 \text{ s}$.

Aufgabe 11: elektrischer Schwingkreis

$U_{\text{ind}} + U_C = 0 \Rightarrow L \cdot Q''(t) = -\frac{1}{C} \cdot Q(t) \Rightarrow Q''(t) = -\frac{1}{LC} Q(t) \Leftrightarrow s(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t\right)$ mit Amplitude $A = Q(0)$

$= U_0 \cdot C = 100 \text{ As}$, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 0,14 \text{ s}^{-1}$, Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0,022 \text{ s}^{-1}$ und

Periodendauer $T = \frac{1}{f} = 44,4 \text{ s}$.