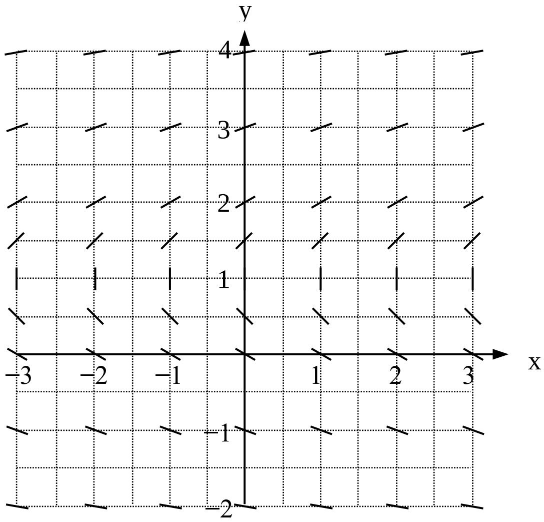
5.6. Prüfungsaufgaben zu Differentialgleichungen und Wachstumsformen

Aufgabe 1a: Richtungsfelder (8)

a) Skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $(2y - 2)\cdot y' = 1$ im Bereich $-3 \le x \le 3$ bzw. $-2 \le y \le 4$. (3)
b) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung aus a) mit dem Startwert $y(0) = 1$ durch Integration. (3)
c) Führe die Probe durch. (2)

Lösung:

a) siehe rechts (3)



Wertetabelle:

y	$y' = \frac{1}{2y-2}$
−2	$-0,1\overline{6}$
−1	−0,25
0	−0,5
0,5	−1
1	-
1,5	1
2	0,5
3	0,25
4	$0,1\overline{6}$

b) $(2y - 2)\frac{dy}{dx} = 1$ | TdV

$\int_1^y (2y-2)dy = \int_0^x 1dx$ | Int

$(y^2 - 2y) - (1^2 - 2\cdot 1) = x - 0$ | VE

$y^2 - 2y + 1 = x$ | 2. bF

$(y - 1)^2 = x$ | $\sqrt{}$

$y - 1 = \pm\sqrt{x}$ | + 1

$y = 1 \pm \sqrt{x}$

c) $y'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$

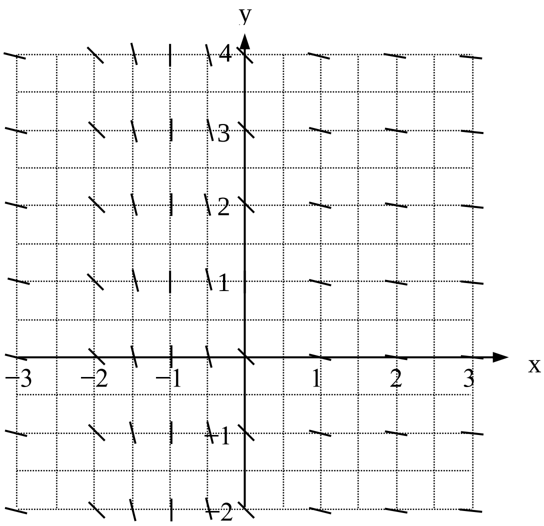
$$(2y - 2)\cdot y' = (2 \pm 2\sqrt{x} - 2)\cdot\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= (\pm 2\sqrt{x})\cdot\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 1.$$

Aufgabe 1b: Richtungsfelder (8)

a) Skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $(x^2 + 2x + 1)\cdot y' = -1$ im Bereich $-3 \le x \le 3$ bzw. $-2 \le y \le 4$. (3)
b) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung aus a) mit dem Startwert $y(0) = 2$ durch Integration. (3)
c) Führe die Probe durch. (2)

Lösung:

a) siehe rechts (3)



Wertetabelle:

x	$y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$
−3	−0,25
−2	−1
−1,5	−4
−1	∞
−0,5	−4
0	−1
1	−0,25
2	−0,11
3	−0,06

b) $(x^2 + 2x + 1)\frac{dy}{dx} = -1$ | TdV

$\int_2^y 1dy = -\int_0^x \frac{1}{(x+1)^2}dx$ | Int

$y - 2 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{0+1}$ | + 2

$y = \frac{1}{x+1} + 1$ (3)

c) $y'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1)\cdot y' = -1$. (2)

Aufgabe 2: Trennung der Variablen (5)

Bestimme die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu den gegebenen Anfangsbedingungen:

a) $\frac{dy}{dx} = x\cdot y^2 + y^2$ mit $y(0) = 1$ b) $x^2\cdot\frac{dy}{dx} + y = 0$ mit $y(2) = 2$ c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ mit $y(1) = 2$

Lösungen

a) $\frac{dy}{dx} = x\cdot y^2 + y^2\, y(x) \Leftrightarrow \int_1^y y^{-2}dy = \int_0^x (x+1)dx \Leftrightarrow \left[-y^{-1}\right]_1^y = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x$ (4)

$\Leftrightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)^{-1}$ (1)

b) $x^2\cdot \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow -\int_2^y y^{-1}dy = \int_2^x x^{-2}dx \Leftrightarrow -\ln(y)\,{}_2^y = \left[-x^{-1}\right]_2^x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ (4)

$\Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ (1)

c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \Leftrightarrow \int_2^y e^y dy = \int_1^x e^x dx \Leftrightarrow \left[e^y\right]_2^y = \left[e^x\right]_1^x \Leftrightarrow e^y - e^2 = e^x - e$ (4)

$\Leftrightarrow y(x) = \ln(e^x + e^2 - e)$ (1)

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum (7)

Bei Tropfinfusionen werden dem Blut des Patienten Medikamente gleichmäßig zugeführt. In einer Klinik werden über eine Tropfinfusion pro Minute 1,8 mg eines Medikaments verabreicht, das bislang im Körper nicht vorhanden war. Andererseits werden über die Nieren pro Minute 5 % der aktuell im Blut vorhandenen Menge dieses Medikaments ausgeschieden. Zu Beginn der Behandlung bekommt der Patient durch eine Spritze 25 mg des Medikaments verabreicht.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Situation um beschränktes Wachstum handelt. (3)
b) Bestimmen Sie eine Funktion, die den Verlauf dieses beschränkten Wachstums beschreibt. (3)
c) Mit welcher Menge des Medikaments ist bei einer längeren Behandlung des Patienten in seinem Körper zu rechnen? (1)

Lösung

a) Es sei t die seit Beginn der Verhandlung vergangene Zeit in Minuten und B(t) der Gehalt des Medikamentes im Blut in mg. Dann gilt $B'(t) = 1{,}8 - 0{,}05\cdot B(t)$. Diese DGL beschreibt ein beschränktes Wachstum. (3)
b) Ausklammern des Wachstumsfaktors ergibt $B'(t) = 0{,}05\cdot(36 - B(t)) \Rightarrow k = 0{,}05$ und $S = 36$. Mit $B(0) = 25$ erhält man die Lösung der DGL $B(t) = S - [S - B(0)]\cdot e^{-kt} = 36 - 11\cdot e^{-0{,}05t}$. (3)
c) Aus b) ergibt sich $B(t) \to S = 36$ mg für $t \to \infty$ (1)

Aufgabe 4: Beschränktes Wachstum (7)

Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.

a) Formuliere die Differentialgleichung für den Bestand B(t) nach t Monaten. (1)
b) Bestimme durch Integration die Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. (2)
c) Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische in dem Teich vorhanden? (2)
d) Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind? (2)

Lösung

a) $B'(t) = k\cdot[S - B(t)]$ mit $S = 7000$ (1)
b) $B(t) = 7000 - 3000e^{-kt}$ mit $B(1) = 4400 \Rightarrow k = \ln\frac{3000}{2600} \approx 0{,}143 \Rightarrow B(t) = 7000 - 3000e^{-0{,}143t}$ (2)
c) $B(t) = 5000 \Leftrightarrow t \approx \frac{\ln(1{,}5)}{0{,}143} \approx 2{,}84$, also nach knapp drei Monaten. (2)
d) $B_5(t) = 7000 - Ae^{-0{,}143t}$ mit $B_5(5) = 5000 \Rightarrow A = 4088{,}4 \Rightarrow$ Startwert $B_5(0) \approx 2912$ Fische (2)

Aufgabe 5: Beschränktes Wachstum (8)

Nach einem leichten Erdbeben verändert sich in einer unterirdischen Höhle das Wasservolumen V(t), das bisher 60 m^3 betrug, mit der Wachstumsgeschwindigkeit $V'(t) = 0{,}72e^{-0{,}008t}$ mit t in Wochen seit dem Erdbeben, V(t) in m^3.

a) Woran ist erkennbar, dass das Wasservolumen zunimmt? (1)
b) Bestimme den Funktionsterm für V(t) durch Integration der gegebenen Wachstumsgeschwindigkeit. (2)
c) Mit welchem Wasservolumen ist auf lange Sicht zu rechnen? (1)
d) Bestätige durch Rechnung, dass V(t) die Differentialgleichung $V'(t) = 0{,}008\cdot[150 - V(t)]$ erfüllt. (1)
e) Erläutere mit Hilfe der Differentialgleichung, dass die Veränderung des Wasservolumens auf einen konstanten Zufluss und einen zeitabhängigen Abfluss von Wasser zurückgeführt werden kann. (3)

Lösung

a) $V(t)$ steigt monoton, weil $V'(t) > 0$ (1)

b) Stammfunktion $V_c(t) = -90e^{-0{,}008t} + c$ mit $V_c(0) = 60 \Rightarrow c = 150 \Rightarrow V(t) = 150 - 90e^{-0{,}008t}$ (2)

c) $V(t) \to 150$ für $t \to \infty$ (Sättigungsschranke) (1)

d) $0{,}008\cdot[150 - V(t)] = 0{,}008\cdot[90e^{-0{,}008t}] = 0{,}72e^{-0{,}008t} = V'(t)$ (1)

e) $V'(t) = 0{,}008\cdot[150 - V(t)] = 1{,}2 - 0{,}008\cdot V(t)$. (1)
Der Zufluss setzt sich also zusammen aus dem konstanten Zufluss $+1{,}2$ m^3/Woche
und dem zeitabhängigen Abfluss $-0{,}008\cdot V(t)$ m^3/Woche (2)

Aufgabe 6: Bevölkerungswachstum

In einem Land mit 70 Millionen Einwohnern kommen auf 1000 Einwohner 11 Geburten und 9 Todesfälle im Jahr. Jedes Jahr wandern durchschnittlich 200 000 Personen aus und 50 000 Personen ein.

a) Beschreibe die Entwicklung der Bevölkerungszahl $B(t)$ nach t Jahren durch eine Differentialgleichung. Mit welcher Bevölkerungszahl ist langfristig zu rechnen?

b) Bestimme die Funktionsgleichung für die Bevölkerungszahl $B(t)$ durch Integration der Differentialgleichung aus a). Wie viele Einwohner gibt es nach 5 Jahren?

Lösung:

a) $B'(t) = -150\,000 + 0{,}002\cdot B(t) = -0{,}002\cdot[75\,000\,000 - B(t)] \Rightarrow$ Beschränkte Zunahme mit $B(0) = 70\,000\,000$ und Sättigungsgrenze $S = 75\,000\,000$. (2)

b) TdV und Integration: siehe Skript (2)
$B(t) = 75\,000\,000 - 5000\cdot e^{-0{,}002\cdot t}$ mit t in Jahren $\Rightarrow B(5) = 74\,995\,050$. (2)

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum, Integration, Tangenten (12)

In einem Land mit ca. 6,0 Millionen Haushalten gab es zu Beginn des Jahres 2004 etwa 3,0 Millionen Haushalte mit einem DVD-Player. Die Zahl H der mit einem DVD-Player versorgten Haushalte in Millionen seit Beginn des Jahres 2000 kann durch die Differentialgleichung $H'(t)=0{,}2\cdot(5{,}2 - H(t))$ beschrieben werden. Dabei ist t die Anzahl der seit Beginn des Jahres 2000 vergangenen Jahre.

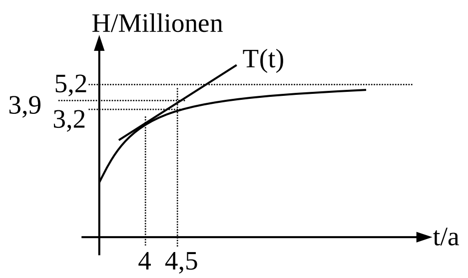
a) Bestimme einen Funktionsterm der Funktion $H(t)$. (2)
Mit welcher Anzahl von Haushalten mit DVD-Playern ist langfristig zu rechnen? (1)
Zu welchem Zeitpunkt steht in 70% der Haushalte des Landes ein DVD-Player? (1)
Wann lag die Änderungsrate der Anzahlen erstmals unter 0,6 Millionen pro Jahr? (1)

b) Welche Größe wird durch $H'(4)$ beschrieben? (1)
Erkläre mit Hilfe einer Skizze, wie man mit Hilfe von $H'(4)$ und $H(4)$ einen Näherungswert für $H(4{,}5)$ berechnen kann. (3)
Bestimme diesen Näherungswert. (1)
Begründe, warum dieser Näherungswert größer als $H(4{,}5)$ ist. (1)

Lösung

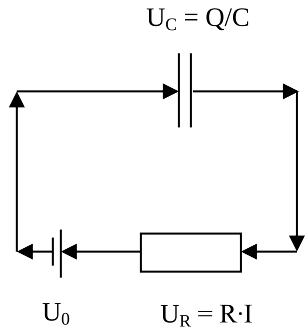
a) $H(t) = 5{,}2 - A\cdot e^{-0{,}2t}$ mit $H(4) = 3 \Leftrightarrow A = 2{,}2e^{0{,}8} \approx 4{,}9 \Rightarrow H(t) = 5{,}2 - 4{,}9e^{-0{,}2t}$ (2)
$H(t) \to 5{,}2$ für $t \to \infty \Rightarrow$ Langfristig wird sich die Zahl der Sättigungsgrenze $S = 5{,}2$ nähern. (1)
$H(t) = 0{,}7\cdot 6 = 4{,}2 \Leftrightarrow 1 = 4{,}9e^{-0{,}2t} \Leftrightarrow t = 5\cdot\ln(4{,}9) \approx 7{,}95$, d.h. Ende 2007 (1)
$H(t + 1) - H(t) < 0{,}6 \Leftrightarrow 4{,}9e^{-0{,}2t}(1 - e^{-0{,}2}) < 0{,}6 \Leftrightarrow t \approx 1{,}96$, d.h. von 2002 nach 2003 (1)

b) $H'(4)$ beschreibt die momentane Änderungsrate zum Jahresbeginn 2004 (1)
Die Tangente $T(t) = H'(4)\cdot(t - 4) + H(4)$ durch $P(4|H(4))$ mit der Steigung $H'(4)$ liefert Näherungswerte in der Umgebung von $t = 4$. (siehe Skizze unten) (3)
$T(t) = 1{,}76(t - 4) + 3 \Rightarrow T(4{,}5) \approx 3{,}88$ Millionen (1)
$H(4{,}5) \approx 3{,}2$ ist kleiner, weil die Kurve rechtsgekrümmt ist, so dass die Tangente oberhalb verläuft. (1)



Aufgabe 8 Beschränktes Wachstum (6)
Ein Kondensator der Kapazität C wird durch eine Gleichspannung über einen Widerstand von R = 1 kΩ aufgeladen.
a) Skizziere das Schaltbild. (1)
b) Formuliere die Differentialgleichung für die Ladungsfunktion Q(t). (1)
c) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. (2)
d) Wie gross ist die Kapazität C des Kondensators, wenn er nach 2 Sekunden zu 80% geladen ist? (3)

Lösungen: (Alles in SI)
Skizze siehe rechts (1)



$U_R + U_C = U_0 \Leftrightarrow R\cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0 \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}$ (1)

$\int_0^Q \frac{dQ}{Q-U_0C} = \int_0^t \left(-\frac{1}{RC}\right)\cdot dt \Leftrightarrow \left[\ln\ Q-U_0C\ \right]_0^Q = \left[-\frac{t}{RC}\right]_0^t$ (1)

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{Q-U_0C}{-U_0C}\right) = -\frac{t}{RC} \Leftrightarrow Q(t) = U_0C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ (1)

Die maximale erreichbare Ladung ist die $Q_\infty = U_0C$ und (1)

aus $Q(2) = 0{,}8\cdot U_0C$ erhält man $0{,}8 = 1-e^{-\frac{2}{1000\cdot C}} \Leftrightarrow 0{,}2 = e^{-\frac{1}{500\cdot C}}$ (1)

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{500\cdot\ln(0{,}2)} \approx 1{,}24$ mF (1)

Aufgabe 9: Rotationsvolumina, beschränktes und logistisches Wachstum (12)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f sei K.

a) Skizziere K mithilfe des GTR. (1)
Bestimme das Volumen des Körpers, der durch Rotation von K zwischen x = 0 und x = 2 um die x-Achse entsteht. (2)
b) Welche Eigenschaften von K können dem Funktionsterm f(x) ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden? Begründe. (3)
c) f wird für $x \geq 2$ verglichen mit einer Funktion h, die dort durch $h(x) = 2 - 8\,e^{-2x}$ gegeben ist.
Zeige, dass der Unterschied zwischen den Funktionswerten von f und h monoton fällt. (2)
Wie groß wird der maximale Unterschied? (1)
Zeige, dass die Funktion h ein beschränktes Wachstum beschreibt. Kann das auch über f gesagt werden? (3)

Lösung
a) Skizze (1)

$V = \pi\int_0^2 (f(x))^2 dx \approx 10{,}86$ VE (2)

Achsenschnittpunkt $S_y(0|\frac{5}{2})$ durch Einsetzen (0,5)

Wertebereich W =]0; ∞[, da $e^{2x} > 0$ und $e^{2x} + 4 > 0$ (0,5)

waagrechte Asymptote y = 0 für $x \to -\infty$, da $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} \to 0$ für $x \to -\infty$ (0,5)

waagrechte Asymptote y = 2 für $x \to +\infty$, da $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} \to 2$ für $x \to +\infty$ (0,5)

$f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} = \frac{2}{1+4e^{-2x}}$ wächst streng monoton, da $1 + 4e^{-2x}$ streng monoton fällt. (0,5)

f hat daher keine Extrempunkte! (0,5)

b) $d(x) = f(x) - h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} - 2 + 8e^{-2x}$ mit $d'(x) = \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2} - 16e^{-2x}$ (1)

Wegen $d'(x) = \frac{16(e^{2x})^2 - 16(e^{2x}+4)^2}{(e^{2x}+4)^2} < 0$ fällt der Unterschied monoton (1)

Der maximale Unterschied wird bei x = 2 erreicht mit $d(2) \approx 0{,}01$ (GTR) (1)

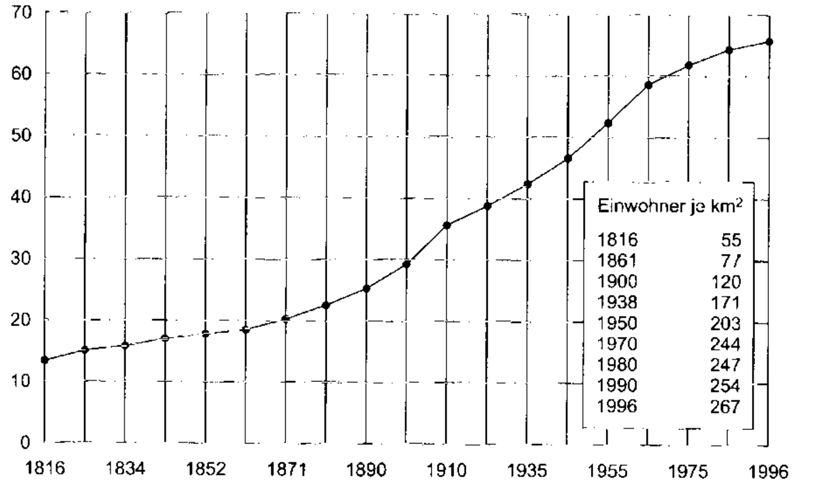
c) Wegen $h'(x) = 16e^{-2x}$ erfüllt h die Differentialgleichung $h'(x) = 2(2 - h(x))$. (1)
h beschreibt daher ein beschränktes Wachstum mit der Sättigungsgrenze S = 2. (1)

Wegen $f'(x) = \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2}$ erfüllt f dagegen die Differenzialgleichung $f'(x) = 2\cdot f(x)\cdot(2 - f(x))$. (1)

f beschreibt daher ein logistisches Wachstum mit der Sättigungsgrenze S = 2. (1)

Aufgabe 10: Beschränktes Wachstum (15)
Das unten stehende Bild gibt die Entwicklung der Bevölkerungsdichte auf dem Gebiet der alten Bundesländer wieder.

Einwohner (in Mio.)



a) Modelliere unter der Annahme exponentiellen Wachstums mittels der in der **Tabelle** angegebenen Bevölkerungsdichte eine geeignete Funktion, die die Entwicklung in den Jahren 1861 bis 1910 näherungsweise beschreibt. (3)
b) Bestimme damit eine Prognose für die Bevölkerungsdichte und die Bevölkerungszahl im Jahr 2004. (1)
c) Die Entwicklung der Bevölkerungsdichte ab 1950 deutet auf beschränktes Wachstum hin. Gib eine geeignete Differenzialgleichung für diese Wachstumsform an. (1)
d) Leite eine Lösung dieser Differenzialgleichung her. (4)
e) Bestimme mit den Daten der Jahre 1950, 1980 und 1996 die Funktion, die diese Entwicklung widerspiegelt. (5)
f) Welche langfristige Bevölkerungsdichte ergibt sich nach diesem Modell? (1)

Lösung

a) Ansatz $B(t) = B(0)\cdot e^{kt}$ mit $B(0) = 77$ für das Jahr 1861 ($t = 0$) und $B(39) = 120$ für das Jahr 1900 ($t = 39$) $\Rightarrow B(0) = 77$ und $k = \frac{1}{39}\cdot\ln\frac{120}{77} \approx 0{,}114 \Rightarrow B(t) \approx 77\cdot e^{0{,}114\,t}$ mit t in Jahren ab 1861. (3)
b) $B(143) \approx 392$ für das Jahr 2004 (1)
c) $B'(t) = k\cdot(S - B(t))$ (1)
d) Man bringt alle von t abhängenden Ausdrücke auf eine Seite und integriert dann mit linearer Substitution: $\frac{B'(t)}{S - B(t)} = k \Rightarrow$

$$\int_0^{t_0}\frac{B'(t)}{S-B(t)}dt = \int_0^{t_0} k\,dt \Leftrightarrow \left[-\ln\left|S-B(t)\right|\right]_0^{t_0} = kt\,\Big|_0^{t_0} \Leftrightarrow \ln\frac{S-B(t_0)}{S-B(0)} = -kt_0 \Leftrightarrow \frac{S-B(t_0)}{S-B(0)} = e^{-kt0} \Leftrightarrow B(t_0) = S - (S - B(0))\cdot e^{-kt0}.$$ (4)

e) $B(0) = 203$ für das Jahr 1950

$B(30) = 247$ für das Jahr 1980 $\Rightarrow \ln\frac{S-247}{S-203} = -30k$

$B(46) = 267$ für das Jahr 1996 $\Rightarrow \ln\frac{S-267}{S-203} = -46k$

Gleichsetzen ergibt $30\,\ln\frac{S-267}{S-203} = 46\,\ln\frac{S-247}{S-203} \Leftrightarrow 30\,\ln\frac{S-267}{S-203} - 46\,\ln\frac{S-247}{S-203} = 0$ Lösung mit dem GTR (CALC / 2: ZERO) ergibt $S \approx 438{,}5$ E / km². Mit Einsetzen erhält man weiter $k \approx \frac{1}{46}\ln\frac{438{,}5-267}{438{,}5-203} \approx 0{,}00689 \Rightarrow B(t) = 438{,}5 - 235{,}8\cdot e^{0{,}00689\cdot t}$ E / km² (5)

f) Aus e) ergibt sich $S = 438{,}5$ E / km². (1)

Aufgabe 11: Wachstum und Differentialgleichungen (16)

Die Wachstums**geschwindigkeit** der Pflanze Abiturium wird in den ersten zehn Jahren nach der Pflanzung durch die Funktion $f'(t) = 6e^4 \dfrac{e^t}{(e^t + e^4)^2}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei t in Jahren nach der Pflanzung, f'(t) in Metern pro Jahr angegeben ist.

Zum Zeitpunkt der Pflanzung ist die Pflanze 10 cm hoch. Das Schaubild von f sei K.

a) Skizziere K mit Hilfe des GTR für $0 \le t \le 10$. Bestimme mit Hilfe des GTR auf 2 Nachkommastellen genau, wann die Pflanze am schnellsten wächst und zu welchen Zeitpunkten sie um 1 m pro Jahr wächst. (5)

b) Skizziere das Schaubild der Funktion f(t), welche die zeitliche Entwicklung der Pflanzenhöhe beschreibt. Bestimme mit Hilfe des GTR, wie hoch die Pflanze nach 4 Jahren ist. (3)

c) Bestimme die Funktionsgleichung für f(t) durch Integration. (3)

d) Nun soll in den ersten 4 Jahren die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze vereinfacht durch exponentielles Wachstum beschrieben werden. Bestimme mithilfe der Werte der oben angegebenen Funktion f'(t) für t = 0 und t =1 die Differentialgleichung und die Lösungsfunktion g(t) für exponentielles Wachstum. (3)

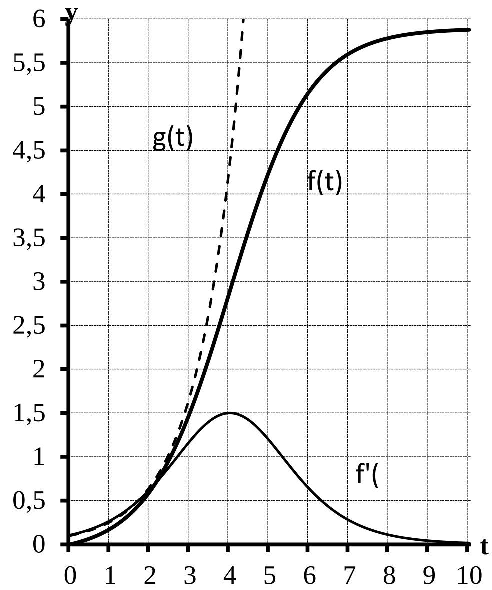
e) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Wachstumsgeschwindigkeit nach dem exponentiellen Ansatz? (1)

f) Vergleiche mithilfe der Werte nach 4 Jahren das vereinfachte Modell mit dem ursprünglichen Modell. (1)

Lösungen

a) Skizze siehe rechts (2)
Das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit f'(t) wird laut GTR nach t = 4 Jahren erreicht. (1)
$f'(t) \approx 1$ m/Jahr wird laut GTR bei $t_1 \approx 2{,}65$ und wieder bei $t_2 \approx 5{,}35$ Jahren erreicht (2)

b) Skizze siehe rechts. (2)
f(t) = 4 ist laut GTR nach $t_3 \approx 4{,}78$ Jahren erreicht. (1)



c) $f(t) = 6e^4 \int_0^t \dfrac{e^t}{(e^t + e^4)^2}\,dt \overset{x=e^t}{=} 6e^4 \int_{e^0=1}^{e^t} \dfrac{1}{(x + e^4)^2}\,dx$ (1)

$= 6e^4 \left[-(x + e^4)^{-1}\right]_1^{e^t}$ (1)

$= 6e^4 \left(\dfrac{1}{1+e^4} - \dfrac{1}{e^t + e^4}\right) = \dfrac{6e^4(e^t - 1)}{(1+e^4)(e^t + e^4)}$ (1)

d) DGL $g'(t) = k \cdot g(t)$ mit $g(0) = 0{,}1$ und (1)

$g'(0) = f'(0) = \dfrac{6e^4}{(1+e^4)^2} \approx 0{,}10597$ ergibt

$k \approx 0{,}943 \Rightarrow g(t) = g(0) \cdot e^{kt} \approx 0{,}1 \cdot e^{0{,}943t}$ (2)

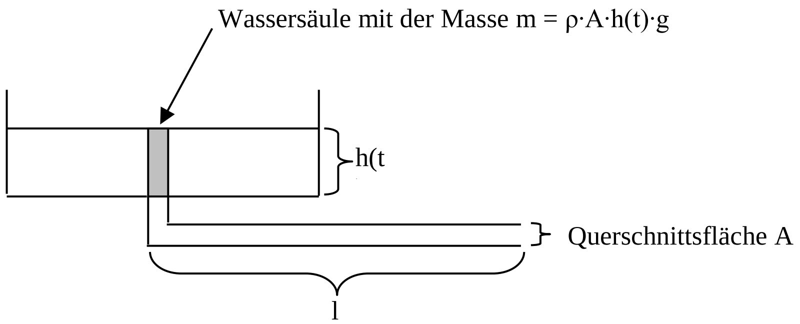
e) Aus $g(t_D) = 2 \cdot g(0)$ ergibt sich die Verdopplungszeit $t_D = \dfrac{\ln(2)}{0{,}943} \approx 0{,}735$ Jahre (1)

f) Der relative Fehler beträgt nach 4 Jahren bereits $\dfrac{g(4) - f(4)}{f(4)} = \dfrac{4{,}11 - 2{,}89}{2{,}89} \approx 42{,}2$ % und vergrößert sich rapide, weil die exponentielle Näherung den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 6$ m nicht berücksichtigt. (1)

Aufgabe 12: Hagen-Poisseuille-Gesetz für Reibungswiderstand in einem Rohr bei laminarer Strömung

Eine Flüssigkeit mit der **Viskosität** η erreicht in einem Rohr der **Länge** l und mit dem **Durchmesser** R bei einer **Druckdifferenz** $\Delta p = p_{Ende} - p_{Anfang}$ zwischen den Rohrenden einen **Volumenstrom** (= Volumen pro Zeit) $V'(t) = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \cdot \Delta p$.

Ein 50 m langes, 20 m breites und 2 m tiefes Schwimmbecken soll durch ein waagrechtes 20 m langes und 20 cm dickes Rohr geleert werden, dessen Anfang im Beckenboden liegt und dessen Ende frei liegt. Der hydrostatische (Über)Druck $\Delta p = -\frac{F_G}{A}$ auf den Rohranfang mit der Querschnittsfläche A kommt durch die auf ihm lastende Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h(t) \cdot g$ der Wassersäule mit der Dichte ρ, der Grundfläche A und der Höhe h(t) zustande. Wasser hat die **Viskosität** η = 1 Ns/m^2 und die **Dichte** ρ = 1000 kg/m^3. Die Schwerebeschleunigung ist g = 10 m/s^2. Bestimme die Ausflussgeschwindigkeit V'(t) in Litern pro Sekunde. Achte auf das **negative Vorzeichen** der Druckdifferenz und der **Ausfluss**geschwindigkeit! Wie lange dauert es, bis das Wasser nur noch 1 cm hoch steht? (Der Rest verdunstet dann!).



Lösungen: (Alles in SI)

Die Ausflussgeschwindigkeit V'(t) ist proportional zum Volumen $V_A(t) = \rho \cdot A \cdot h(t)$ der Wassersäule, die über dem Ausfluss steht. Diese ist wiederum proportional zum Gesamtvolumen $V(t) = \rho \cdot 1000\ m^2 \cdot h(t)$ mit $V_A(t) = \frac{A}{1000} V(t)$ (2)

Die DGL lautet $V'(t) = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \cdot \Delta p = -\frac{\pi R^4}{8\eta l} \cdot \rho \cdot V_A(t) \cdot g = -\frac{\pi R^4 \rho g \cdot A}{8\eta l \cdot 1000} \cdot V(t) \Leftrightarrow V'(t) = -k \cdot V(t)$ mit $k = \frac{\pi^2 R^6 \rho g}{8000 \eta l} = \frac{\pi^2}{250000}$ (2)

Mit V(0) = 2000 ergibt sich die Lösung $V(t) = V(0) \cdot e^{-kt}$ für das ausgeflossene Volumen nach t Sekunden. (1)

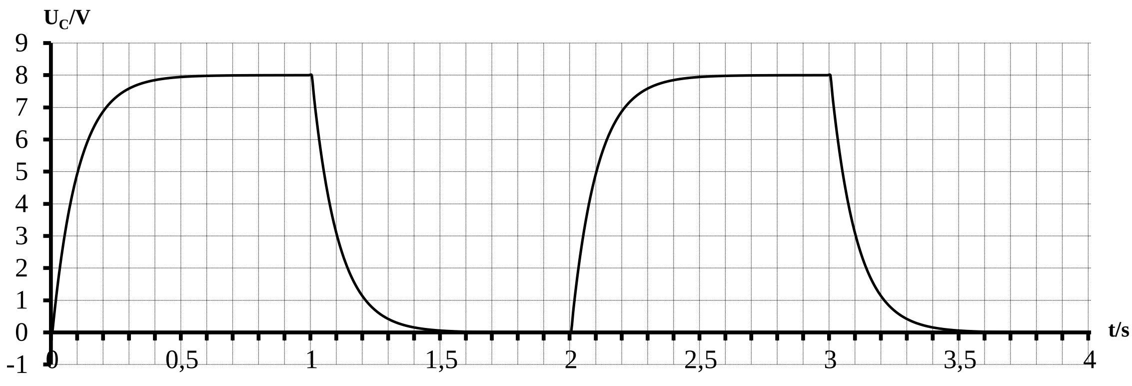
Aus V(t) = 10 erhält man die Ausflusszeit $t = -\ln(0{,}02)/k \approx 99092$ s ≈ 27 h 31 min und 32 s. (2)

Aufgabe 13: Funktionsanpassung

Der Schalter in der rechts abgebildeten Schaltung wird im Sekundentakt an- und wieder ausgeschaltet.

a) Bestimme die Gleichung für die unten abgebildete Kurve der Kondensatorspannung $U_C(t)$ in der ersten Sekunde. (3)

b) Bestimme die Kapazität C aus der in a) ermittelten Gleichung (1)



Lösungen

a) Ansatz $U(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$ mit $\lim_{t \to 1s} U(t) = U_0 = 8V$ und U(0,1) = 5V (2)

$\Rightarrow 5 = 8(1 - e^{-0,1/RC}) \Rightarrow RC = -0{,}1 : \ln\left(\frac{3}{8}\right) \approx 0{,}102$ s (1)

b) C ≈ 0,102 s / 5 Ω ≈ 20,4 mF (1)

Aufgabe 14: Trennung der Variablen:
Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $x^2 \cdot y' + y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Lösungen

$x^2 \cdot y' + y = 0$ $\quad \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -y$ (0,5)

$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$ (0,5)

$\Leftrightarrow \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{dy}{y} = -\int_1^x \frac{dx}{x^2}$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\ln(y)\right]_1^{y(x)} = \left[\frac{1}{x}\right]_1^x$ (1)

$\Leftrightarrow \ln(y) = \ln(1) + \frac{1}{x} - \frac{1}{1} = \frac{1}{x} - 1$ (1)

$\Leftrightarrow y(x) = e^{\frac{1}{x}-1} = \frac{\sqrt[x]{e}}{e}$. (1)