5.7.5. Rekursive Näherung der Quadratwurzel nach Heron ca. AD 50

Schon die **Babylonier** berechneten Näherungswerte für Quadratwurzeln nach der folgenden Idee: Man wählt den Startwert $x_0 = a$ und sucht Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots$, deren Quadrate $x_1^2, x_2^2, \ldots$ immer näher an a heran kommen. Diese Forderung ist z.B. erfüllt, wenn das neue Quadrat x_{n+1}^2 jeweils um die Hälfte näher an a liegt als das alte Quadrat x_n^2: $x_{n+1}^2 = \frac{1}{2}(x_n^2 + a)$. Leider lässt sich diese Formel nicht ohne Wurzelziehen nach x_{n+1} auflösen. Der Trick besteht nun darin, dass man anstelle des Quadrates x_{n+1}^2 des neuen Näherungswertes das Produkt $x_{n+1} \cdot x_n$ mit dem alten Wert verwendet: $x_{n+1} \cdot x_n = \frac{1}{2}(x_n^2 + a)$. In Worten: Das **geometrische Mittel** $\sqrt{x_{n+1}^2 \cdot x_n^2}$ zwischen altem und neuen Quadrat liegt genau auf dem **arithmetischen Mittel** $\frac{1}{2}(x_n^2 + a)$ zwischen altem Quadrat und Zielquadrat a. Teilt man auf beiden Seiten durch x_n, so erhält man eine Formel ohne Wurzelausdrücke für einen vermutlich besseren Näherungswert

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ mit } x_0 = a$$

Diese Formel wurde zum ersten Mal durch den griechischen Ingenieur **Heron von Alexandria** (AD 10 – 70) exakt formuliert. (Von ihm stammen u.a. Pläne für eine funktionierende **Dampfmaschine** und Beiträge zum **Teilchenmodell**.) Ob diese Idee wirklich **immer** auf die gesuchte Wurzel führt, muss aber erst durch die folgende Konvergenzuntersuchung geklärt werden!

1. Mit vollständiger Induktion zeigt man zunächst, dass $x_n > 0$ für alle $n \geq 0$: Nach Voraussetzung ist $x_0 = a > 0$. Ist $x_n > 0$, so gilt dies offensichtlich auch für $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, da ja nach Voraussetzung $a > 0$.

2. Es gilt sogar $x_n^2 > a$, weil
$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{2}a + \left(\frac{a}{2x_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}x_n^2 - \frac{1}{2}a + \left(\frac{a}{2x_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$
und dies gilt natürlich auch für $x_n^2 - a$.

3. (x_n) ist monoton fallen, weil
$$\begin{aligned} x_{n+1} &< x_n \\ \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) &< x_n \\ x_n + \frac{a}{x_n} &< 2x_n \\ \frac{a}{x_n} &< x_n \\ a &< x_n^2 \end{aligned}$$
und dies ist nach 2. für alle n erfüllt.

4. Aus 1. – 3. folgt, dass die Folge (x_n) monoton fallen und nach unten beschränkt ist. Sie muss also gegen einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ konvergieren. Die Frage ist, ob es sich dabei wirklich um die gesuchte Wurzel handelt.

   Angenommen, $b = \sqrt{a} + \varepsilon$ mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$. Dann gäbe es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n mit $b < x_n < b + \varepsilon = \sqrt{a} + 2\varepsilon$. Daraus folgt aber schon für das folgende Glied $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) < \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + 2\varepsilon + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a} + \varepsilon$, d.h., schon x_{n+1} würde dann bereits unter dem angenommenen Grenzwert $b = \sqrt{a} + \varepsilon$ liegen. Das kann nicht sein, denn weil die Folge monoton fällt, muss der Grenzwert b eine untere Schranke sein!