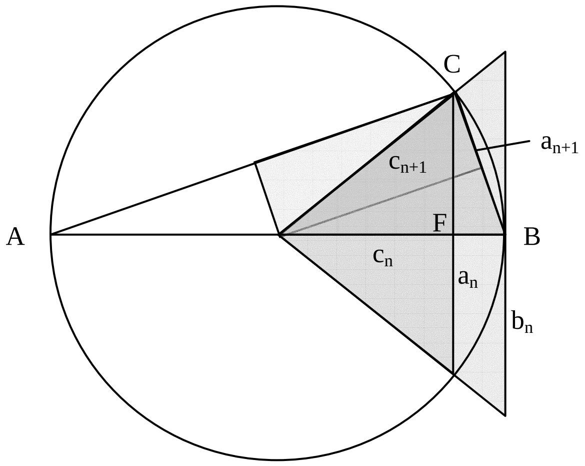
5.7.7. Rekursive Näherung der Kreiszahl π nach Archimedes ca. BC 250

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt. Diesmal berechnen wir die Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke aber nicht einzeln unabhängig voneinander, sondern paarweise abwechselnd auseinander. Erstaunlicherweise ergibt sich aus dieser Idee eine wesentliche Vereinfachung der Berechnungen. a_n bzw. b_n sind die Seitenlängen der ein- bzw. umbeschriebenen Vielecke. c_n sind die Abstände der Seitenmitten vom Kreismittelpunkt. In der Abbildung sind drei gleichschenklige Dreiecke eingezeichnet, aus denen die entsprechenden Vielecke aufgebaut werden können. In diesen Dreiecken sind c_n die Höhen und a_n bzw. b_n die Grundseiten.



Da c_{n+1} senkrecht auf seiner Grundseite steht und ABC nach den Satz des Thales rechtwinklig ist, ist das schraffierte Viereck ein Rechteck mit parallelen Seiten und teilt nach dem Strahlensatz die Strecke AC in zwei gleich lange Teile: $\overline{AC} = 2c_{n+1}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann auf zwei Arten berechnet werden: Einerseits ist A = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}a_n$ mit der Höhe $\frac{1}{2}a_n$ und der Grundseite AB mit der Länge 2. Andererseits ist A = $\frac{1}{2}\cdot 2c_{n+1}\cdot a_{n+1}$ mit der Höhe a_{n+1} und der Grundseite AC mit der Länge $2c_{n+1}$. Daraus erhält man die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}\cdot 2c_{n+1}\cdot a_{n+1}$, also

$$a_n = 2a_{n+1}c_{n+1} \text{ (Gleichung I)}$$

Nach den Strahlensatz ist weiterhin $\frac{b_n}{1} = \frac{a_n}{c_n}$ bzw. entsprechend

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \text{ (Gleichung II)}$$

Die Dreiecke BC und FC sind rechtwinklig und haben bei A einen gemeinsamen Winkel. Daher sind sie ähnlich und wieder nach dem Strahlensatz gilt $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{2c_{n+1}}{2} = \frac{1+c_n}{2c_{n+1}}$ bzw.

$$2c_{n+1}^2 = 1 + c_n \text{ (Gleichung III)}$$

Aus den Gleichungen I – III eliminieren wir durch Einsetzen die Höhen c_n und c_{n+1} und erhalten dann zwei Gleichungen, mit denen sich die Seitenlängen a_{n+1} und b_{n+1} **paarweise abwechselnd** aus a_n und b_n berechnen lassen. Aus (II) wird durch Einsetzen von (I) und (III) $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{a_n}{2c_{n+1}^2} = \frac{a_n}{1+c_n} = \frac{a_n}{1+a_n/b_n} = \frac{a_n b_n}{a_n+b_n} = b_n\cdot\frac{1}{1+b_n/a_n}$. Nützlich ist später die Gleichung für das Verhältnis

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{1+b_n/a_n} \text{ (Gleichung (IV)}$$

Für a_{n+1} können wir die Berechnung von b_{n+1} nach Gleichung (IV) schon voraussetzen, so dass es genügt, (I) und (II) auf beiden Seiten zu multiplizieren:

$$2a_{n+1}^2 = a_n b_{n+1}. \text{ (Gleichung (V)}$$

Da die inneren und äußeren Vielecke jeweils die gleiche Eckenzahl haben, gilt für ihre halben Umfänge π_n bzw. π'_n

$$\frac{\pi'_n}{\pi_n} = \frac{b_n}{a_n} \text{ (Gleichung VI)}$$

Da die Eckenzahl in jedem Schritt verdoppelt wird, gilt außerdem

$$\frac{\pi'_{n+1}}{\pi'_n} = \frac{2b_{n+1}}{b_n} \text{ (Gleichung VII)}$$

bzw.

$$\frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} = \frac{2a_{n+1}}{a_n} \text{ (Gleichung VIII)}$$

Durch Einsetzen von (IV) und (VI) in (VII) erhält man $\pi'_{n+1} = \pi'_n \cdot \frac{2b_{n+1}}{b_n} = \frac{2\pi'_n}{1 + b_n / a_n} = \frac{2\pi'_n}{1 + \pi'_n / \pi_n}$, also

$$\pi'_{n+1} = \frac{2\pi_n \pi'_n}{\pi_n + \pi'_n} \text{ (Gleichung IX)}$$

Für π_{n+1} kann man dann π'_{n+1} schon verwenden und erhält mit Gleichung (VI) und (VIII) einerseits $\pi_{n+1} = \pi'_{n+1} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ und andererseits $\pi_{n+1} = \pi_n \frac{2a_{n+1}}{a_n}$. Durch Multiplikation auf beiden Seiten erhält man $\pi_{n+1}^2 = \pi'_{n+1} \pi_n \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{2a_{n+1}}{a_n}$. Wegen Gleichung (V) kürzen sich die Brüche weg und es bleibt $\pi_{n+1}^2 = \pi'_{n+1} \pi_n$ bzw.

$$\pi_{n+1} = \sqrt{\pi'_{n+1} \cdot \pi_n} \text{ (Gleichung X)}$$

Ausgehend von den Startwerten $\pi_0 = 2$ und $\pi'_0 = 4$ lässt sich nun durch abwechselnde Anwendung der Gleichungen (IX) und (X) die Doppelfolge der halben Umfänge π_n und π'_n der inneren und äußeren Vielecke deutlich einfacher als in 5.7.6. berechnen. Nach nur 5 Schritten erhält man so die Abschätzung $\pi_5 \approx 3{,}1410 < \pi < 3{,}1428 \approx \pi'_5$. Dieses Methode wurde seit **Archimedes** ((287 BC – 212 BC) bis ins 17. Jahrhundert für die Berechnung von π verwendet. Heute benutzt man noch schneller konvergierende Folgen z.B. mit Hilfe einer Folgendarstellung (**Taylorentwicklung**) der Sinusfunktion.