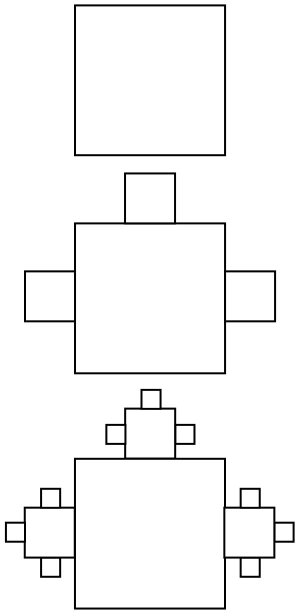
5.7. Aufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 1: Lineares und beschränktes Wachstum



Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm gehen auf die rechts angedeutete Weise neue Figuren hervor. Die im n-ten Schritt angefügten Quadrate sind jeweils nur $\frac{1}{3}$ so breit wie die im (n − 1)-ten Schritt angefügten Quadrate.

a) Berechne den Umfang U_n nach n = 0, 1, 2, 3 und 4 Schritten.
b) Wie groß ist der Zuwachs $U_{n+1} - U_n$ des Umfangs im n+1-ten Schritt?
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_{n+1} aus U_n berechnen lässt.
d) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_n direkt aus n berechnen lässt.
e) Berechne den Flächeninhalt A_n der Figur nach n = 1, 2, 3 und 4 Schritten
f) Wie groß ist der Zuwachs $A_{n+1} - A_n$ der Fläche im n+1-ten Schritt?
g) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_{n+1} aus A_n berechnen lässt.
h) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_n direkt aus n berechnen lässt.

   Hinweis: $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
i) Berechne A_{100} und U_{100} und vergleiche. Welche Aussage lässt sich aus diesem Beispiel über den Umfang und die Fläche natürlicher Gebilde wie z. B. des Landes Baden-Württemberg ableiten?
j) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2: Berechnung von Folgengliedern aus gegebenen expliziten und rekursiven Formeln

Berechne die ersten 5 Folgenglieder $a_0, ..., a_4$:

a) $a_n = 100\cdot 2^{-n}$
b) $a_n = 100 - 50\cdot 2^{-n}$
c) $a_n = \frac{1}{n+1}$
d) $a_n = (n + 1)(n + 2)$
e) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ mit $a_0 = 3$
f) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n$ mit $a_0 = 3$
g) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$
h) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{20} a_n\cdot(5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$

Aufgabe 3: Bestimmung von expliziten und rekursiven Formeln aus gegebenen Folgengliedern

Stelle die explizite und die rekursive Formel für die gegebenen Folgenglieder auf:

a) $a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 7; a_4 = 9$
b) $a_0 = 3; a_1 = 6; a_2 = 12; a_3 = 24; a_4 = 48$
c) $a_0 = 2; a_1 = 6; a_2 = 18; a_3 = 54; a_4 = 162$
d) $a_0 = 2; a_1 = 5; a_2 = 10; a_3 = 17; a_4 = 26$
e) $a_0 = 0; a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{4}; a_4 = \frac{4}{5}$
f) $a_0 = 1; a_1 = \frac{2}{3}; a_2 = \frac{4}{9}; a_3 = \frac{8}{27}; a_4 = \frac{16}{81}$
g) $a_0 = -1; a_1 = 1; a_2 = \frac{7}{5}; a_3 = \frac{11}{7}; a_4 = \frac{5}{3}$
h) $a_0 = 0; a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = \frac{4}{9}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{16}{81}$

Aufgabe 4: Bestimmung von rekursiven Darstellungen aus expliziten Formeln

Gib eine rekursive Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_n = 3n + 2$
b) $a_n = n^2 - 2n$
c) $a_n = 3^{-n}$
d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 5: Bestimmung von expliziten Formeln aus rekursiven Darstellungen

Gib eine explizite Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_0 = 2$
b) $a_{n+1} = 0{,}8\cdot a_n$ mit $a_0 = 20$
c) $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ mit $a_0 = 0$
d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ mit $a_0 = 0$

Aufgabe 6: Monotonie einer Folge
Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 - n}$ c) $a_n = n^3 - 3n^2$ d) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 7: Beschränktheit einer Folge
Untersuche die folgenden Folgen auf Beschränktheit und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = n^2 - n^3$ d) $a_n = n^2 \cdot 3^{-n}$

Aufgabe 8: Grenzwert einer Folge
Gib den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ an und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = \frac{1}{n}\sin(n)$ d) $a_n = n^3 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 9: Konvergenz einer Folge
Untersuche die Folge (a_n) für $n \geq 1$ mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

a) $a_n = \frac{1-4n}{1+2n}$ b) $a_n = \frac{n-1}{2n}$ c) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$ d) $a_n = \frac{n\sqrt{n}+10}{n^2}$

Aufgabe 10: Reihen und Summenschreibweise
Ergänze die Tabelle:

erzeugende Folge a_n	Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$	entsprechende Funktion f(x)	Integral $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx$
$\frac{1}{n}$			
	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$		
	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$		
		$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	

Aufgabe 11: Arithmetische Reihe

a) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k$ und $\sum\limits_{k=60}^{100} a_k$ für die Folge $a_n = 2 + \frac{n}{10}$.

b) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{16} a_k$ und $\sum\limits_{k=40}^{80} a_k$ für die Folge a_n mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$

c) Bestimme Startwert a_0 und Zuwachs d für die arithmetische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k = 22$ und $\sum\limits_{k=0}^{6} a_k = 7$.

d) Bestimme den Zuwachs d für die arithmetische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=10}^{90} a_k = 31$ und Startwert $a_0 = 1$.

Aufgabe 12: Geometrische Reihe

a) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k$ und $\sum\limits_{k=70}^{100} a_k$ für die Folge $a_n = 100 \cdot 0{,}9^n$.

b) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k$ und $\sum\limits_{k=40}^{50} a_k$ für die Folge a_n mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = 1{,}2 \cdot a_n$.

c) Bestimme Startwert a_0 und Wachstumsfaktor q für die geometrische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{7} a_k = 641$ und $\sum\limits_{k=0}^{3} a_k = 625$.

d) Bestimme Startwert a_0 und Faktor q für die geometrische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{4} a_k = 336{,}16$ und Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 500$

Aufgabe 13: Grenzwert einer Reihe

Untersuche die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^n}$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}$

Aufgabe 14: Vollständige Induktion

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion:

a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$ für $n \geq 1$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$ für $n \geq 1$

c) $6 + 24 + 60 + 120 + \dots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4} n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

d) $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $n \geq 0$.

e) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $n \geq 1$

f) Die Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + (n + 1)(n + 2)$ hat die explizite Formel $a_n = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2)$.

g) Die Folge (a_n) mit $a_1 = \frac{3}{4}$ und $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{(3n+4)(2n+1)}$ hat die explizite Formel $a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$.

h) 7 teilt $8^n - 1$ für $n \geq 1$

i) 6 teilt $n^3 - n$ für $n \geq 2$

j) $(1 + x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$, $x > -1$ und $x \neq 0$ (**Bernoulli-Ungleichung**)

Aufgabe 15: Monotonie und Beschränktheit

a) Zeige durch vollständige Induktion, dass die Folge (a_n) mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist

b) Zeige durch Lösen der Ungleichung $\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) > \sqrt{3}$, dass die Folge aus a) sogar durch $\sqrt{3}$ nach unten beschränkt ist.

c) Zeige, dass die Folge aus a) außerdem monoton fällt.

d) Bestimme den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge aus a).

Hinweis: Für $n \to \infty$ gilt $a_n = a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Man kann daher in der Rekursionsformel $a_n = a_{n+1} = a$ setzen und nach a auflösen.

5.7. Lösungen zu den Aufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 1: Lineares und beschränktes Wachstum
Alle Strecken in dm, alle Flächen in dm^2:
a) $U_0 = 4$, $U_1 = 6$, $U_2 = 8$, $U_3 = 10$ und $U_4 = 12$
b) $U_{n+1} - U_n = 2$ (**lineares Wachstum**
c) $U_{n+1} = U_n + 2$ (**rekursive Formel**)
d) $U_n = 4 + 2n$ (**explizite Formel**)
e) $A_0 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1{,}33$, $A_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \approx 1{,}44$, $A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \approx 1{,}48$

und $A_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 1{,}49$

f) $A_{n+1} - A_n = 3^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (**beschränktes Wachstum**)

g) $A_{n+1} = A_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (**rekursive Formel**)

h) $A_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1-1/3^{n+1}}{1-1/3} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.(**explizite Formel**)

i) $U_{100} = 204$ und $A_{100} \approx 1{,}5 \Rightarrow$ Der Umfang wächst unbeschränkt aber die Fläche nähert sich einem **Grenzwert**.

j) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2}$

Aufgabe 2: Berechnung von Folgengliedern aus expliziten und rekursiven Formeln
a) $a_0 = 100$; $a_1 = 50$; $a_2 = 25$; $a_3 = 12{,}5$; $a_4 = 6{,}25$
b) $a_0 = 50$; $a_1 = 75$; $a_2 = 87{,}5$; $a_3 = 93{,}75$; $a_4 = 96{,}875$
c) $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{4}$; $a_4 = \frac{1}{5}$
d) $a_0 = 2$; $a_1 = 6$; $a_2 = 12$; $a_3 = 20$; $a_4 = 30$
e) $a_0 = 3$; $a_1 = 3{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 4{,}5$; $a_4 = 5$
f) $a_0 = 3$; $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 6{,}75$; $a_3 = 10{,}125$; $a_4 = 15{,}1875$
g) $a_0 = 3$; $a_1 = 4$; $a_2 = 4{,}5$; $a_3 = 4{,}75$; $a_4 = 4{,}875$
h) $a_0 = 3$; $a_1 = 3{,}3$; $a_2 \approx 3{,}74$; $a_3 \approx 3{,}98$; $a_4 = 4{,}18$

Aufgabe 3: Bestimmung von expliziten und rekursiven Formeln aus Folgengliedern
a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = 1 + 2n$
b) $a_{n+1} = 2a_n$ mit $a_0 = 3 \Rightarrow a_n = 3\cdot 2^n$
c) $a_{n+1} = 3a_n$ mit $a_0 = 2 \Rightarrow a_n = 2\cdot 3^n$
d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$ mit $a_0 = 2 \Rightarrow a_n = (n + 1)^2 + 1$
e) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ mit $a_0 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}$
f) $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$ mit $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
g) $a_{n+1} = a_n + \frac{6}{(2n+3)(2n+1)}$ mit $a_0 = -1 \Rightarrow a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$
h) $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 a_n$ für $n \geq 1$ mit $a_1 = 1$ und $a_0 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{n^2}{3^n}$

Aufgabe 4: Bestimmung von rekursiven Formeln aus expliziten Formeln
a) $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_0 = 2$
b) $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ mit $a_0 = 0$
c) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ mit $a_0 = 1$
d) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ mit $a_0 = 0$

Aufgabe 5: Bestimmung von expliziten Formeln aus rekursiven Darstellungen
a) $a_n = -3n + 2$
b) $a_n = 20\cdot 0{,}8^n$
c) $a_n = n(n + 1)$
d) $a_n = n^2$

Aufgabe 6: Monotonie einer Folge

a) monoton zunehmend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} = \frac{n^2+n}{n^2+n-2} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) monoton zunehmend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)}}{\sqrt{n^2-n}} = \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2-n}} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) monoton zunehmend für $n \geq 2$, da $a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 - n^3 + 3n^2 = 3n^2 - 3n - 2 = 3(n^2 - n - \frac{2}{3}) > 0$ für $n \geq 2$

d) monoton abnehmend für $n \geq 2$,
da $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 \cdot 2^{-(n+1)} - n^2 \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)}(n^2 + 2n + 1 - 2n^2) = 2^{-(n+1)}(-n^2 + 2n + 1) < 0$ für $n \geq 2$

Aufgabe 7: Beschränktheit einer Folge

a) Obere Schranke $S_o = 1$, weil $a_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und untere Schranke $S_u = 0$, weil $a_n \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Keine obere Schranke S, da es kein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq S \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \leq S \Leftrightarrow n^2 + n \leq S^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und untere Schranke $S_u = 0$, weil $a_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Obere Schranke $S_o = 0$, weil $a_n \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - n^3 \leq 0 \Leftrightarrow n^2(1-n) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und keine untere Schranke S, da es kein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq S \Leftrightarrow n^2 - n^3 \geq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) Obere Schranke $S_o = 1$, weil $a_n \leq 1 \Leftrightarrow n^2 \cdot 3^{-n} \leq 1 \Leftrightarrow n^2 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und untere Schranke $S_u = 0$, da $n^2 \cdot 3^{-n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 8: Grenzwert einer Folge

Zu zeigen ist, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_e gibt, so dass die Ungleichung: $|a_\varepsilon - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ erfüllt ist.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |1 - \frac{n+2}{n+1}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |1 - \frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1 - \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq (1-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^2} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)} \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n}\sin(n)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |n^3 \cdot 2^{-n}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{2^n}{n^3}$ erfüllt ist für alle $n \geq 10$

Aufgabe 9: Konvergenz einer Folge

a) Beschränktheit: $a_n = \frac{1-4n}{1+2n} = -2 + \frac{3}{1+2n} \Rightarrow -2 < a_n < 1$, weil $a_n + 2 = \frac{3}{1+2n}$ und $0 < \frac{3}{1+2n} < 3$

Monotonie: $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{1+2(n+1)} - \frac{3}{1+2n} = \frac{3}{2n+3} - \frac{3}{2n+1} = < 0 \Rightarrow a_n$ fällt monoton (gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$)

b) Beschränktheit: $a_n = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{2}$, weil $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$.

Monotonie: $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} > 0 \Rightarrow a_n$ steigt monoton (gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$)

c) Beschränktheit: $a_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n} = \frac{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{-3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = -\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} \Rightarrow -2 < a_n < 0$, weil $0 < \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} < 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n < 2$

Monotonie: $a_{n+1} - a_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n} - \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n+1}-3^{n+1}} = \frac{(2^{n+1}-3^{n+1})(2^n+3^n)-(2^{n+1}+3^{n+1})(2^n-3^n)}{(2^{n+1}-3^{n+1})(2^n-3^n)}$

$= \frac{2^{2n+1}-6^n+3^{2n+1}-(2^{2n+1}+6^n-3^{2n+1})}{(2^{n+1}-3^{n+1})(2^n-3^n)} = \frac{2\cdot 3^{2n+1}}{(2^{n+1}-3^{n+1})(2^n-3^n)} > 0$

$\Rightarrow a_n$ steigt monoton (gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$)

d) Beschränktheit: $a_n = \frac{n\sqrt{n}+10}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2} \Rightarrow 0 < a_n < 1 + 10 = 11$

Monotonie: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{10}{(n+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{10}{n^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{10}{(n+1)^2} - \frac{10}{n^2}\right) < 0$, weil beide Klammern < 0

$\Rightarrow a_n$ fällt monoton (gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$)

Aufgabe 10: Reihen und Summenschreibweise
Ergänze die Tabelle:

erzeugende Folge a_n	Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$	entsprechende Funktion f(x)	Integral $\int_1^{n+1} f(x)dx$
$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$	$\frac{1}{x}$	ln(n + 1)
$\frac{1}{3^n}$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$	$\frac{1}{3^x}$	$3\cdot\ln(3)\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$
$\frac{1}{n^2}$	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$	$\frac{1}{x^2}$	$1 - \frac{1}{n+1}$
$\frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$	$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	$\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

Aufgabe 11: Arithmetische Reihe

a) $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k = 63$ und $\sum\limits_{k=60}^{100} a_k = \sum\limits_{k=0}^{100} a_k - \sum\limits_{k=0}^{59} a_k = 707 – 297 = 410$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{16} a_k = 119$ und $\sum\limits_{k=40}^{80} a_k = \sum\limits_{k=0}^{80} a_k - \sum\limits_{k=0}^{39} a_k = 1863 – 510 = 1353$.

c) Aus $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k = 11a_0 + 55d = 22 \Leftrightarrow a_0 + 5d = 2$ und $\sum\limits_{k=0}^{6} a_k = 7a_0 + 21d = 7 \Leftrightarrow a_0 + 3d = 1$ erhält man $a_0 = -\frac{1}{2}$ und $d = \frac{1}{2}$

d) Aus $\sum\limits_{k=0}^{90} a_k = 91\cdot 1 + 4095d = \sum\limits_{k=0}^{9} a_k + 31 = 10\cdot 1 + 45d + 31 \Leftrightarrow 91 + 4095d = 41 + 45d \Leftrightarrow 50 = 4050\,d$ erhält man $d = \frac{1}{81}$

Aufgabe 12: Geometrische Reihe

a) $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k = 1000\cdot(1 – 0{,}9^{21}) \approx 890{,}581$ und $\sum\limits_{k=70}^{100} a_k = 1000\cdot(1 – 0{,}9^{101}) \approx 999{,}976$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k = 15\cdot(1{,}2^{11} – 1) \approx 96{,}45$ und $\sum\limits_{k=40}^{50} a_k = 15\cdot(1{,}2^{51} – 1) \approx 163\,792{,}89$

c) Aus $\sum\limits_{k=0}^{7} a_k = a_0\cdot\frac{q^8-1}{q-1} = 641$ und $\sum\limits_{k=0}^{3} a_k = a_0\cdot\frac{q^4-1}{q-1} = 625$ erhält man$\cdot \frac{q^8-1}{q^4-1} = \frac{641}{625} \Leftrightarrow \frac{(q^4-1)(q^4+1)}{q^4-1} = 1{,}0256$

$\Leftrightarrow q^4 = 0{,}256 \Rightarrow$ Wachstumsfaktor q = 0,4 und Startwert $a_0 \approx 384{,}85$

d) Aus $\sum_{k=0}^{4} a_k$ = $a_0 \cdot \frac{q^5-1}{q-1}$ = 336,16 und Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ = $a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ = 500 erhält man $q^5 - 1 = -\frac{336,16}{500}$ $\Leftrightarrow$ $q^5 = 0,32768$

$\Leftrightarrow$ Wachstumsfaktor q = 0,8 und Startwert $a_0 = 100$.

Aufgabe 13: Grenzwert einer Reihe

a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist monoton steigend, da $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (s_n) ist nach oben beschränkt, da

$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (s_n) muss daher gegen einen

Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n \leq 2$ konvergieren. L. Euler zeigt im Jahr 1736, dass $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64$

b) $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ ist monoton steigend, da $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(2n+3)^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (s_n) ist nach oben beschränkt, da

$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < 1 + \int_0^n \frac{1}{(2x+1)^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right]_0^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{4n+2} < \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n)

muss daher gegen ein $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \frac{3}{2}$ konvergieren. L. Euler zeigte im Jahr 1736, dass $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \approx 1,23$

c) $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ ist monoton steigend, da $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{3^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (s_n) ist nach oben beschränkt, da

$s_n = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} < \int_{-1}^{n} \frac{1}{3^x}dx = \int_{-1}^{n} e^{-\ln(3)\cdot x}dx = \left[-\frac{1}{\ln(3)} \cdot e^{-\ln(3)\cdot x}\right]_{-1}^{n} = \frac{3}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)\cdot 3^n} < \frac{3}{\ln(3)}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(s_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \frac{3}{\ln(3)}$ konvergieren. Der exakte Grenzwert ergibt sich durch

Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

d) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ ist monoton steigend, da $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (s_n)

ist nach oben beschränkt, da $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} < \int_0^n \frac{1}{n+x}dx = \ln(n+x)\Big|_0^n = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$

für alle $n \geq 1$ und $s_0 = 1$. (s_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \ln(2)$ konvergieren.

Aufgabe 14: Vollständige Induktion

a) **Induktionsanfang** n = 1: 2 = ·1·(1 + 1)

Induktionsschritt n $\Rightarrow$ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: 2 + 4 + 6 +... + 2n = n(n + 1)
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: 2 + 4 + 6 +... + 2n + 2(n + 2 = (n + 1)(n + 2)
Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:
2 + 4 + 6 +... + 2n + 2(n + 2) = n(n + 1) + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2
Rechte Seite: (n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2 **qed**

b) **Induktionsanfang** n = 1: $1^2 = \frac{1}{6}$ 1(1 + 1)(2 + 1) = 1

Induktionsschritt n $\Rightarrow$ n + 1:

Induktionsannahme für ein beliebiges n: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}$ n(n + 1)(2n + 1)

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}$ (n + 1)(n + 2)(2n + 3)

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1$

Rechte Seite: $\frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6} (2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1$, **qed**

Induktionsstart $n = 1$: $6 = \frac{1}{4} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 6$

c) **Induktionsschritt n ⇒ n + 1**:
Annahme für beliebiges n:

$6 + 24 + 60 + 120 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

Zu zeigen ist die Behauptung für n + 1:

$6 + 24 + 60 + 120 + \ldots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

Linke Seite mit Einsetzen der Annahme:

$6 + 24 + 60 + 120 + \ldots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3)$

$= \frac{1}{4} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ = **rechte Seite**, **qed**.

d) **Induktionsanfang** $n = 0$: $1 = \frac{1-x^1}{1-x} = 1$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Induktionsannahme für ein beliebiges n: $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ **qed**

e) **Induktionsanfang** $n = 1$: $1 = \frac{1-2x+x^2}{(1-x)^2} = 1$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n::

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1:

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + (n+1)x^n = \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+1)x^n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1} + (1-x)^2(n+1)x^n}{(1-x)^2}$

$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1} + (n+1)x^n - 2(n+1)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$

$= \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ = **rechte Seite**. **qed**

f) **Induktionsstart** $n = 1$: $2 = \frac{1}{3} \cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 2$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme für ein beliebiges n: $a_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $a_{n+1} = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3)$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$:a_{n+1} = a_n + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n + n^2 + 3n + 2 = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3}n + 2.$

Rechte Seite: $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{3}(n^2 + 3n + 2)(n+3) = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3}n + 2 =$ **linke Seite**, **qed.**

g) **Induktionsstart für n = 1**: $\frac{3}{4} = \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme für ein beliebiges n: $a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$

Zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $a_{n+1} = \frac{2n+3}{3n+4}$

Linke Seite mit Einsetzen der Annahme:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{(3n+4)(2n+1)} = \frac{2n+1}{3n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(3n+4)(2n+1)}\right) = \frac{2n+1}{3n+1}\cdot\frac{6n^2+11n+3}{(3n+4)(2n+1)} = \frac{2n+1}{3n+1}\cdot\frac{(3n+1)(2n+3)}{(3n+4)(2n+1)} =$$

$\frac{2n+3}{3n+4}$ = **rechte Seite**, **qed.**

h) **Induktionsanfang** n = 1: 7 teilt $8^1 - 1 = 7$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: 7 teilt $8^n - 1$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: 7 teilt $8^{n+1} - 1 = 8\cdot 8^n - 1 = 7\cdot 8^n + 8^n - 1$
Offensichtlich ist der linke Summand $7\cdot 8^n$ durch 7 teilbar. **Nach Induktionsannahme** ist auch der rechte Summand 8n − 1 durch 7 teilbar und damit die ganze Summe. **qed**

i) **Induktionsanfang** n = 1: 6 teilt $2^3 - 2 = 6$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: 6 teilt $n^3 - n$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1:

6 teilt $(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 6\cdot\frac{1}{2}n(n + 1)$

Nach Induktionsannahme ist auch der linke Summand $n^3 - n$ durch 6 teilbar. Da entweder n oder n + 1 gerade ist, ist $\frac{1}{2}$ n(n + 1) eine ganze Zahl. Daher ist auch der rechte Summand $6\cdot\frac{1}{2}n(n + 1)$ durch 6 teilbar und damit die ganze Summe. **qed**

j) **Induktionsanfang** n = 2: $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, da $x^2 > 0\cdot$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: $(1 + x)^n > 1 + nx$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$
Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$(1 + x)^{n+1}$ $(1 + x)^n(1 + x) > (1 + nx)(1 + x)$, da nach Voraussetzung 1 + x > 0
$= 1 + (n + 1)x + x^2$
$> 1 + (n + 1)x$, da $x^2 > 0$ **qed**

Aufgabe 15: Vollständige Induktion, Monotonie und Beschränktheit

a) **Induktionsanfang** n = 0: $a_0 = 3 > 0\cdot$

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: $a_n > 0$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $a_{n+1} > 0$

Einsetzen der Induktionsannahme: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) > 0$, weil $a_n > 0$, qed.

b) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right) > \sqrt{3} \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} > 2\sqrt{3} \overset{x>0 \text{ wegen a)}}{\Leftrightarrow} x^2 + 3 > 2\sqrt{3}\,x \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3}\,) > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3-a_n^2}{a_n}\right) > 0$, weil wegen b) gilt $a_n^2 < 3 \Rightarrow (a_n)$ ist monoton fallend.

d) Für $n \to \infty$ gilt $a_n = a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ und damit $a = \frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\,\frac{3}{a} \Leftrightarrow a^2 = 3 \overset{a>0 \text{ wegen a)}}{\Leftrightarrow} a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ **.**