5.7. Prüfungsaufgaben zu Folgen

Aufgabe 1a: Explizite Darstellung (3)

a) Bestimme die explizite Darstellung der Folge (a_n) mit $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{2}{4}$, $a_2 = \frac{5}{9}$, $a_3 = \frac{5}{8}$, $a_4 = \frac{17}{25}$ und $a_5 = \frac{13}{18}$ (2)

b) Bestimme den Grenzwert der Folge. (1)

Lösung

$a_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgabe 1b: Explizite Darstellung (3)

a) Bestimme die explizite Darstellung der Folge (a_n) mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{5}$, $a_3 = \frac{2}{5}$, $a_4 = \frac{9}{17}$ und $a_5 = \frac{8}{13}$ (2)

b) Bestimme den Grenzwert der Folge. (1)

Lösung

$a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Problem 2: General and recursive formulae (16)
Fill in the missing formulae resp the first five terms and back up your results with some form of calculation:

$a_0, \dots, a_4$	general formula	recursive formula
	$a_n = \frac{2-n}{(n+1)^2}$	
	$a_n = \frac{2-n}{n+1}$	
	$a_n = \frac{1-n}{n+1}$	
		$a_{n+1} = a_n - \frac{n-1}{2^{n+1}}$ with $a_0 = 0$
$\frac{2}{3}$; 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$		
$\frac{3}{4}$; 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{64}{27}$		

Problem 2: General and recursive formulae (Each cell 2 p)

$a_0, \dots, a_4$	general formula	recursive formula
2; $\frac{1}{4}$; 0 ; $-\frac{1}{16}$; $-\frac{2}{25}$	$a_n = \frac{2-n}{(n+1)^2}$	$a_{n+1} = a_n - \frac{n^2-3n-7}{(n^2+3n+2)^2} = a_n\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\cdot\frac{n-1}{n-2}$ with $a_0 = 2$
2; $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{5}$	$a_n = \frac{2-n}{n+1}$	$a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n^2+3n+2} = a_n\cdot\frac{n^2-4}{n^2-1}$ with $a_0 = 2$
1; 0 ; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{5}$	$a_n = \frac{1-n}{n+1}$	$a_{n+1} = a_n - \frac{2}{n^2+3n+2} = a_n\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n-2}$ with $a_0 = 1$
0; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{4}$	$a_n = \frac{n}{2^n}$	$a_{n+1} = a_n - \frac{n-1}{2^{n+1}} = a_n\cdot\frac{n+1}{2n}$ with $a_0 = 0$
$\frac{2}{3}$; 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$	$a_n = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = a_n + \frac{3^{n-1}}{2^n} = a_n\cdot\frac{3}{2}$ with $a_0 = \frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$; 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{64}{27}$	$a_n = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = a_n + \frac{4^{n-1}}{3^n} = a_n\cdot\frac{4}{3}$ with $a_0 = \frac{3}{4}$

recursive formulae:

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1-n}{(n+2)^2} - \frac{2-n}{(n+1)^2} = \frac{(1-n)(n+1)^2-(2-n)(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{(1-n^2)(1+n)-(4-n^2)(2+n)}{(n^2+3n+2)^2}$

$= \frac{1+n-n^2-n^3-(8+4n-2n^2-n^3)}{(n^2+3n+2)^2} = \frac{-7-3n+n^2}{(n^2+3n+2)^2}$

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1-n}{n+2} - \frac{2-n}{n+1} = \frac{-(n^2-1)+(n^2-4)}{(n+1)(n+2)} = -\frac{3}{n^2+3n+2}$

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{-n}{n+2} - \frac{1-n}{n+1} = \frac{-(n^2+n)+(n^2+n-2)}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n^2+3n+2}$

Aufgabe 3a: Explizite und rekursive Darstellung (4)

a) Berechne die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ mit $a_1 = 2$ für $n \geq 1$ (2)

b) Bestimme die explizite Darstellung der Folge und begründe. (4)

Lösung

a) $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{8}{3}$, $a_4 = \frac{11}{4}$, $a_5 = \frac{14}{5}$ (2)

b) $a_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$ (2)

denn $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{n+1} + \frac{3}{n}$ (1)

$= \frac{3(n+1)-3n}{n(n+1)}$ (0,5)

$= \frac{3}{n(n+1)}$ (0,5)

Aufgabe 3b: Explizite und rekursive Darstellung (6)

a) Berechne die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n(n+1)}$ mit $a_1 = 4$ für $n \geq 1$ (2)

b) Bestimme die explizite Darstellung der Folge und begründe. (4)

Lösung

a) $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \frac{7}{4}$, $a_5 = \frac{8}{5}$ (2)

b) $a_n = \frac{3+n}{n} = \frac{3}{n} + 1$, (2)

denn $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$ (1)

$= \frac{3n-3(n+1)}{n(n+1)}$ (0,5)

$= -\frac{3}{n(n+1)}$ (0,5)

Aufgabe 3c: Explizite und rekursive Darstellung (Aufgabensatz A 2004) (6)

a) Berechne die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ mit $a_1 = \frac{1}{3}$ für $n \geq 1$ (2)

b) Bestimme die explizite Darstellung der Folge und begründe. (4)

Lösung

a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{5}$, $a_3 = \frac{3}{7}$, $a_4 = \frac{4}{9}$, $a_5 = \frac{5}{11}$ (2)

b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$, (2)

$$\text{denn } a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} \quad (0,5)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0,5)$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0,5)$$

Problem 4a: Arithmetic and geometric sequences (6)

Given are the terms $a_4 = 5$ and $a_{10} = 13$ of a sequence (a_n). Find the general formula and the recursive formula of a_n under the assumption that

a) (a_n) is of arithmetic type
b) (a_n) is of geometric type

Solutions

a) Arithmetic type: $a_n = a_0 + n\cdot d$ or $a_{n+1} = a_n + d$ with a_0 given (1)

$\Rightarrow 13 = a_0 + 10\cdot d$ and $5 = a_0 + 4\cdot d \Rightarrow 8 = 6d \Rightarrow$ common difference $d = \frac{4}{3}$ and initial value $a_0 = 5 - 4\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ (2)

b) Geometric type: $a_n = a_0\cdot q^n$ or $a_{n+1} = q\cdot a_n$ with a_0 given (1)

$\Rightarrow 13 = a_0\cdot q^{10}$ and $5 = a_0\cdot q^4 \Rightarrow \frac{13}{5} = q^6 \Rightarrow$ common ratio $q = \sqrt[6]{2,6} \approx 1,17$ and initial value $a_0 = \frac{5}{q^4} = \frac{5}{2,6^{2/3}} \approx 2,64$ (2)

Problem 4b: Arithmetic and geometric sequences (6)

Given are the terms $a_{13} = 5$ and $a_{20} = 8$ of a sequence (a_n). Find the general formula and the recursive formula of a_n under the assumption that

a) (a_n) is of arithmetic type
b) (a_n) is of geometric type

Solutions

a) Arithmetic type: $a_n = a_0 + n\cdot d$ or $a_{n+1} = a_n + d$ with a_0 given (1)

$\Rightarrow 5 = a_0 + 13\cdot d$ and $8 = a_0 + 20\cdot d \Rightarrow 3 = 7d \Rightarrow$ common difference $d = \frac{3}{7}$ and initial value $a_0 = 5 - 4\cdot\frac{3}{7} = -\frac{4}{7}$ (2)

b) Geometric type: $a_n = a_0\cdot q^n$ or $a_{n+1} = q\cdot a_n$ with a_0 given (1)

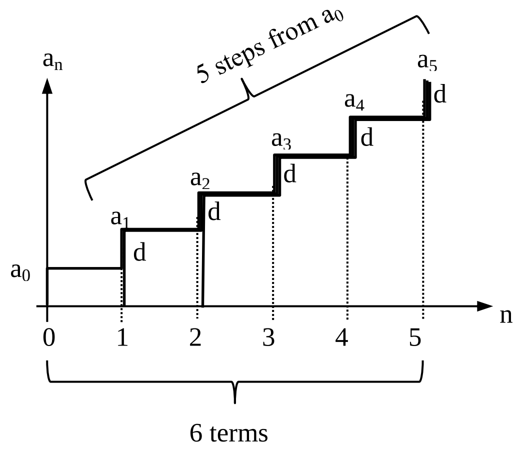
$\Rightarrow 5 = a_0\cdot q^{13}$ and $8 = a_0\cdot q^{20} \Rightarrow \frac{8}{5} = q^7 \Rightarrow$ common ratio $q = \sqrt[7]{1,6} \approx 1,07$ and initial value $a_0 = \frac{5}{q^{13}} = \frac{5}{1,6^{13/7}} \approx 2,09$ (2)

Problem 5: arithmetic sequences (5)

Write down the general formula for an arithmetic sequence with initial value a_0 and common difference d starting with

a) $n = 0$
b) $n = 1$
c) $n = 2$

Explain the formulae with a drawing



Solutions:

Consider the terms as **heights**:

a) $n = 0$: n steps from a_0 to $a_n \Rightarrow a_n = a_0 + n\cdot d$ (1)
b) $n = 1$: $n - 1$ steps from a_1 to $a_n \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$ (1)
c) $n = 2$: $n - 2$ steps from a_2 to $a_n \Rightarrow a_n = a_0 + (n - 2)\cdot d$ (1)

Drawing (2)

Aufgabe 6: Beschränktes Wachstum (5)

Ein See wird seit Beginn der Stallhaltezeit im November über seine Zuflüsse durch 1 m^3 reine Gülle pro Tag bereichert. Durch den Abfluß wird jeden Tag 1 % der im See vorhanden Gülle wieder abgeführt. Den Sommer über war der See güllefrei.

a) Berechne den Güllegehalt G(t) nach 10 Tagen, wenn der See den Sommer über güllefrei war. (1)
b) Berechne den Güllegehalt G(t) nach 10 Tagen, wenn der See im Sommer bereits 50 m^3 Gülle enthielt. (1)
c) Zeige, dass die Entwicklung des Güllegehaltes dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (2)
d) Zeige: Wenn G(t) größer als S ist, fällt es monoton ab. Wenn G(t) kleiner als S ist, steigt es monoton an (1)

Lösung

a) $G(t + 1) = 0{,}99\cdot G(t) + 1$ mit $G(0) = 0 \Rightarrow G(5) = 9{,}56\ m^3$ (1)
b) $G(t + 1) = 0{,}99\cdot G(t) + 1$ mit $G(0) = 50 \Rightarrow G(5) = 54{,}78\ m^3$ (1)
c) $G(t + 1) = 0{,}99\cdot G(t) + 1 \Leftrightarrow G(t + 1) - G(t) = 0{,}01\cdot[100 - G(t)]$ (1)
$\Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit $S = 100\ m^3$ und $p = 1\ \%$ (1)
d) $G(t + 1) - G(t) = 0{,}01\cdot[100 - G(t)] > 0 \Leftrightarrow G(t)$ steigt monoton, wenn $G(t) < 100$ und umgekehrt (1)

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum (10)

Ein Gebirgsbach mit einem Volumenstrom von 1000 m^3 pro Tag wird durch einen Erdrutsch auf einer flachen Wiese zu einem kleinen Teich gestaut. Dort hatten sich infolge eines Regengusses schon vorher 3000 m^3 Wasser gesammelt. Pro Tag versickern 40 % des gestauten Wassers in der Wiese.

a) Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen. (1)
b) Zeige, dass die Entwicklung der gestauten Wassermenge dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und bestimme die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (4)
c) Formuliere die explizite Formel für das Teichvolumen W_n nach n Tagen (2)
d) Untersuche die Folge W_n auf Monotonie und Beschränktheit und begründen Sie. (2)
e) Zeige, dass die Folge W_n konvergiert. (1)

Lösung

a) $W_{n+1} = 0{,}6\cdot W_n + 1000$ mit $W_0 = 3000 \Rightarrow W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n \Rightarrow W_5 = 2505{,}12\ m^3$. (1)
b) $W_{n+1} = 0{,}6\cdot W_n + 1000 = W_n + 0{,}4(2500 - W_n)$ mit W_n in m^3 und n in Tagen seit Erdrutsch. (2)
Die Sättigungsgrenze ist $S = 2500\ m^3$ und die prozentuale Änderungsrate $p = 0{,}4$ (2)
c) $S - W_n = (S - W_0)\cdot 0{,}4^n \Leftrightarrow 2500 - W_n = -500\cdot 0{,}4^n \Leftrightarrow W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n$ (2)
d) W_n ist monoton fallend, da $W_{n+1} - W_n = 500\cdot 0{,}4^{n+1} - 500\cdot 0{,}4^n = 500\cdot 0{,}4^n(0{,}4 - 1) = -300\cdot 0{,}4^n < 0$ (1)
W_n ist nach unten beschränkt, da $W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n > 2500$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1)
e) W_n ist monoton fallend und nach unten beschränkt und muss deshalb konvergieren. (1)

Aufgabe 8: Beschränktes Wachstum (10)

Eine Bakterienkultur bedeckt nach einigen Tagen ungehinderten Wachstums am Tag n = 0 einen Anteil von 60% ihrer 50 cm^2 grossen Petrischale- Die Kultur erreicht an diesem Tag an einer Stelle den Rand der Petrischale und wächst von nun an nach der Formel $a_{n+1} = 10 + 0{,}8\cdot a_n$, wobei a_n die am n-ten Tag nach dem Tag n = 0 bedeckte Fläche in cm^2 beschreibt.

a) Wie viele cm^2 bedeckt die Kultur am 0. Tag?
b) Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $a_n = 50 - 20\cdot 0{,}8^n$ für $n \geq 0$.
c) Wie viele cm^2 bedeckt die Kultur am 10. Tag?
d) Zeige mit Hilfe der oberen Schranke S = 50, dass die Formel tatsächlich eine monoton steigende Folge beschreibt.
e) Im Lauf welchen Tages erreicht die Kultur 90% der Gesamtfläche?

Lösungen

a) $A_0 = 0{,}6\cdot 50\ cm^2 = 30\ cm^2$. (1)
b) Induktionsstart f0r n = 0: Nach Voraussetzung ist $a_0 = 0{,}6\cdot 50\ cm^2 = 30\ cm^2$. (1)
Nach der Behauptung ist $a_0 = 50 - 20\cdot 0{,}8^0 = 30\ cm^2$. (1)
Die Behauptung ist also für den Startwert n = 0 bewiesen.
Induktionsschritt: Durch Einsetzen der Induktionsannahme $a_n = 50 - 20\cdot 0{,}8^n$ in die Voraussetzung $a_{n+1} = 10 + 0{,}8\cdot a_n$ erhält man $a_{n+1} = 10 + 0{,}8\cdot(50 - 20\cdot 0{,}8^n) = 50 - 0{,}8\cdot 20\cdot 0{,}8^n = 50 - 20\cdot 0{,}8^{n+1}$ und damit die Behauptung für n + 1. (2)
c) $a_{10} = 50 - 20\cdot 0{,}8^{10} \approx 47{,}85\ cm^2$ (1)
d) $a_{n+1} - a_n = 10 - 0{,}2\cdot a_n > 10 - 0{,}2\cdot 50 = 0$, da $a_n < 50$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

$45 = 50 - 20\cdot 0{,}8^n \Leftrightarrow 0{,}25 = 0{,}8^n \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} \approx 6{,}21$, also im Laufe des 7. Tages. (2)

Aufgabe 9: Grenzwerte (6)

Untersuche die Folge $a_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf Beschränktheit sowie Monotonie und Grenzverhalten für $n \to \infty$.

Lösungen:

Beschränktheit: $0 < a_n < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{n^2+1}{(n+1)^2} < 2 \Leftrightarrow 0 < n^2 + 1 < 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$ wegen $n > 0$. (2)

Monotonie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)^2+1)\cdot(n+1)^2}{(n+2)^2\cdot(n^2+1)} = \frac{(n^2+2n+2)\cdot(n^2+2n+1)}{(n^2+4n+4)\cdot(n^2+1)} = \frac{n^4+4n^3+7n^2+4n+2}{n^4+4n^3+5n^2+4n+1} > 1$ (1)

$\Rightarrow a_n$ ist monoton steigend. (1)

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{2n}{(n+1)^2}) = 1 - 0 = 1$ (2)

Aufgabe 10: Grenzwerte (3)

a) Formuliere eine exakte Definition für den Grenzwert einer Folge. (3)

b) Nenne ein Beispiel für eine Folge mit dem Grenzwert 3. (1)

Lösung

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn es für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein passendes n_0 gibt, so dass die Abweichung $|a - a_n| < \varepsilon$ wird für alle $n > n_0$. (3)

b) $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ (1)

Aufgabe 11: Grenzwerte (5)

a) Zeige rechnerisch, dass die Folge $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist und bestimme ihren Grenzwert an. (3)

b) Von welchem n an weichen die Glieder der Folge um weniger als $\varepsilon = \frac{1}{100}$ von ihrem Grenzwert ab? (2)

Lösung

a) Monotonie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[3(n+1)+1][2n-1]}{[2(n+1)-1][3n+1]} = \frac{[3n+4][2n-1]}{[2n+1][3n+1]} = \frac{6n^2+5n-4}{6n^2+5n+1} < 1$ $\Rightarrow$monoton fallend (2)

Beschränktheit nach unten: $a_n = \frac{3n+1}{2n-1} > \frac{3}{2}$, denn $3n + 1 > \frac{3}{2}(2n-1) = 3n - \frac{3}{2}$ für alle $n \geq 1$. (1)

b) $\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{2(3n+1)-3(2n-1)}{4n-2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 500 < 4n - 2 \Leftrightarrow n \geq 126$. (2)

Aufgabe 12: Grenzwerte (5)

a) Zeige rechnerisch, dass die Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$ monoton fallend sowie nach unten beschränkt ist und bestimme ihren Grenzwert. (3)

b) Von welchem n an weichen die Glieder der Folge um weniger als $\varepsilon = \frac{1}{100}$ von ihrem Grenzwert ab? (2)

Lösung

a) Monotonie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)+1][3n-1]}{[3(n+1)-1][2n+1]} = \frac{[2n+3][3n-1]}{[3n+2][2n+1]} = \frac{6n^2+7n-3}{6n^2+7n+2} < 1$ $\Rightarrow$monoton fallend (2)

Beschränktheit nach unten: $a_n = \frac{2n+1}{3n-1} > \frac{2}{3}$, denn $2n + 1 > \frac{2}{3}(3n-1) = 2n - \frac{2}{3}$ für alle $n \geq 1$. (1)

b) $\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3(2n+1)-2(3n-1)}{9n-3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 500 < 9n - 3 \Leftrightarrow n \geq 56$. (2)

Problem 13: sigma notation (5)

Give the value $\sum_{k=4}^{6}\frac{k}{k+3}$ and $\sum_{k=1}^{100}\frac{k+3}{3}$ as a single fraction.

Solution

$$\sum_{k=4}^{6}\frac{k}{k+3} = \frac{4}{7} + \frac{5}{8} + \frac{6}{9} = \frac{67}{56} + \frac{2}{3} = \frac{313}{168} \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k+3}{3} = \sum_{k=1}^{100}\left(1+\frac{k}{3}\right) = \sum_{k=1}^{100}1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{100}k = 100 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101 = 100 + \frac{5050}{3} = \frac{5350}{3} \qquad (3)$$

Problem 14a: sigma notation (6)

a) Show that $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$ for $n \in \mathbb{N}$. (3)

b) Use a) to find the general formula for the sequence (a_n) with $a_{n+1} = a_n + 2n - 3$ and $a_0 = 5$ (3)

Solutions

a) $1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + ...}$ $= \frac{1}{2}n\cdot(n+1)$, because

if n is even find $\frac{1}{2}n$ pairs each with sum $(n + 1)$ which give together $\frac{1}{2}n\cdot(n + 1)$ (1)

if n is odd take $\frac{1}{2}(n - 1)$ pairs with sum n out of the first $n - 1$ terms which give $\frac{1}{2}(n - 1)\cdot n$. (1)

Then add the remaining odd term n and you get $\frac{1}{2}(n - 1)\cdot n + n = \frac{1}{2}(n + 1)\cdot n$ again, qed. (1)

b) $a_n = 5+\sum_{k=0}^{n-1}(2k-3) = 5 + 2\sum_{k=0}^{n-1}k - 3\sum_{k=0}^{n-1}1 = 5 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot n - 3\cdot n = 5 + n^2 - n - 3n = n^2 - 4n + 5 = (n - 2)^2 + 1.$ (3)

Question 15: arithmetic series (8)

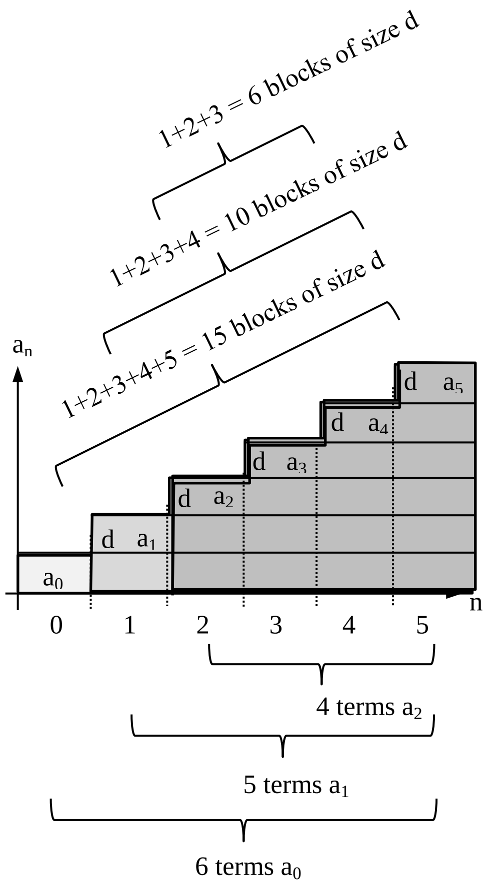
Write down the general formula for an arithmetic **series** with initial value a_0 and common difference d starting with

a) $n = 0$

b) $n = 1$

c) $n = 2$

Explain the formulae with a drawing



Solutions:

Consider the terms as **rectangles**

a) $n = 0$: $n + 1$ terms a_0 and

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n\cdot(n + 1)$ blocks of size d (1)

from a_0 to a_n

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(a_0 + k\cdot d) = (n + 1)\cdot a_0 + \frac{1}{2}n\cdot(n + 1)\cdot d$ (1)

b) $n = 1$: n terms a_1 and

$1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)\cdot n$ blocks of size d (1)

from a_1 to a_n

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_1 + k\cdot d) = n\cdot a_1 + \frac{1}{2}(n - 1)\cdot n\cdot d$ (1)

c) $n = 2$: $n - 1$ terms a_2 and

$1 + 2 + \ldots + (n - 2) = \frac{1}{2}(n - 2)\cdot(n - 1)$ blocks of size d (1)

from a_2 to a_n

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}(a_2 + k\cdot d) = (n - 1)\cdot a_2 + \frac{1}{2}(n - 2)\cdot(n - 1)\cdot d$ (1)

Drawing (2)

Question 16a (5)

a) Show that $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (2)

b) For which value of x does the above formula not work? Find a (very simple) formula for this forbidden value of x. (1)

c) For which values of x does the limit $\lim_{n\to\infty} x^{n+1}$ exist? Determine $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ for these x. (2)

Solutions

a) $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, because

$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)\cdot(1 - x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

$- (x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1})$ (0,5)

$= 1 - x^{n+1}$ (0,5)

Dividing by (1 – x) delivers the result, qed (1)

b) For x = 1 the formula is not defined but obviously $\sum_{k=0}^{n} 1^k = 1^0 + 1^1 + \ldots + 1^n = n + 1$. (1)

c) $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ for $|x| < 1$ and consequently $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ (2)

Question 17a: arithmetic and geometric series

Find the general formula for (a_n), $n \in \mathbb{N}$ if (a_n) is

a) an arithmetic sequence with $a_9 = 10$ and $a_{19} = 12$

b) an arithmetic sequence with $\sum_{k=0}^{9} a_k = 10$ and $\sum_{k=0}^{19} a_k = 12$

c) a geometric sequence with $a_9 = 10$ and $a_{19} = 12$

d) a geometric sequence with $\sum_{k=0}^{9} a_k = 10$ and $\sum_{k=0}^{19} a_k = 12$

Solutions

a) Approach $a_n = a_0 + n\cdot d \Rightarrow d = 0,2$ and $a_0 = 8,2$

b) Approach $a_n = (n + 1)\cdot a_0 + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n + 1)\cdot d \Leftrightarrow 10a_0 + 45d = 10$ and $20a_0 + 190d = 12 \Rightarrow d = -0,08$ and $a_0 = 1,36$

c) Approach $a_n = a_0\cdot q^n \Rightarrow q = 1,2^{0,1} \approx 1,02$ and $a_0 = 10\cdot 1,2^{-0,9} \approx 1,94$

d) Approach $a_n = a_0\cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow a_0\cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 10$ and $a_0\cdot \frac{1-q^{20}}{1-q} = 12 \Rightarrow 1 + q^{10} = 1,2$

$\Rightarrow q = 0,2^{0,1} \approx 0,85$ and $a_0 = 12,5(1 - 0,2^{0,1}) \approx 1,86$

Question 17b: arithmetic and geometric series

Find the general formula for (a_n), $n \in \mathbb{N}$ if (a_n) is

a) an arithmetic sequence with $a_7 = 10$ and $a_{15} = 18$

b) an arithmetic sequence with $\sum_{k=0}^{7} a_k = 10$ and $\sum_{k=0}^{15} a_k = 18$

c) a geometric sequence with $a_7 = 10$ and $a_{15} = 18$

d) a geometric sequence with $\sum_{k=0}^{7} a_k = 10$ and $\sum_{k=0}^{15} a_k = 18$

Solutions

a) Approach $a_n = a_0 + n\cdot d \Rightarrow d = 0,8$ and $a_0 = 4,4$

b) Approach $a_n = (n + 1)\cdot a_0 + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n + 1)\cdot d \Leftrightarrow 8a_0 + 28d = 10$ and $16a_0 + 120d = 18 \Rightarrow d = -\frac{1}{32}$ and $a_0 = \frac{87}{64}$

c) Approach $a_n = a_0\cdot q^n \Rightarrow q = \sqrt[8]{1,8} \approx 1,08$ and $a_0 = 10\cdot 1,8^{-\frac{7}{8}} \approx 5,98$

d) Approach $a_n = a_0\cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow a_0\cdot \frac{1-q^{8}}{1-q} = 10$ and $a_0\cdot \frac{1-q^{16}}{1-q} = 18 \Rightarrow 1 + q^8 = 1,8$

$\Rightarrow q = \sqrt[8]{0,8} \approx 0,9725$ and $a_0 = 50(1 - \sqrt[8]{0,8}) \approx 1,3754$

Question 17c: arithmetic and geometric series

Find the general formula for (a_n), $n \in \mathbb{N}$ if (a_n) is

a) an arithmetic sequence with $a_3 = 4$ and $a_7 = 6$

b) an arithmetic sequence with $\sum_{k=0}^{3} a_k = 4$ and $\sum_{k=0}^{7} a_k = 6$

c) a geometric sequence with $a_3 = 4$ and $a_7 = 6$

d) a geometric sequence with $\sum_{k=0}^{3} a_k = 4$ and $\sum_{k=0}^{7} a_k = 6$

Solutions

a) Approach $a_n = a_0 + n \cdot d \Rightarrow d = 0{,}5$ and $a_0 = 2{,}5$

b) Approach $a_n = (n + 1) \cdot a_0 + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot d \Leftrightarrow 4a_0 + 6d = 4$ and $8a_0 + 28d = 6 \Rightarrow d = -\frac{1}{8}$ and $a_0 = \frac{19}{16}$

c) Approach $a_n = a_0 \cdot q^n \Rightarrow q = \sqrt[4]{1{,}5} \approx 1{,}067$ and $a_0 = 4 \cdot 1{,}5^{-\frac{3}{4}} \approx 3{,}108$

d) Approach $a_n = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow a_0 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 4$ and $a_0 \cdot \frac{1-q^8}{1-q} = 6 \Rightarrow 1 + q^4 = 1{,}5$

$\Rightarrow q = \sqrt[4]{0{,}5} \approx 0{,}841$ and $a_0 = 8(1 - \sqrt[4]{0{,}5}) \approx 1{,}273$