5.7. Prüfungsaufgaben zur vollständigen Induktion

Aufgabe 1: Rekursive Darstellung und vollständige Induktion (5)

a) Leite eine rekursive Formel für die Folge $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ her. (2)

b) Überprüfe dein Ergebnis durch vollständige Induktion. (3)

Lösung

a) $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ (2)

b) n = 1: linke Seite: $a_1 = 2$ (gegeben), rechte Seite: $a_1 = 3 - \frac{1}{1} = 2$

$n \Rightarrow n + 1$: linke Seite $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} = 3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 3 - \frac{1}{n+1}$, rechte Seite $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$ (3)

Aufgabe 2: Rekursive Darstellung und vollständige Induktion (5)

a) Leite eine rekursive Formel für die Folge $a_n = \frac{3}{n} + 1$ her. (2)

b) Überprüfe dein Ergebnis durch vollständige Induktion. (3)

Lösung

a) $a_{n+1} = \frac{3}{n+1} + 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = -\frac{3}{n\cdot(n+1)}$ (2)

b) n = 1: linke Seite: $a_1 = 4$ (gegeben), rechte Seite: $a_1 = \frac{3}{1} + 1 = 4$

$k \Rightarrow k + 1$: linke Seite $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3}{n} + 1 - \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3}{n+1} + 1$, rechte Seite $a_{n+1} = \frac{3}{n+1} +1$. (3)

Aufgabe 3: explizite Formel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Folge a_n mit $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2n$ die explizite Formel $a_n = n^2 - n + 3$ besitzt.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $3 = 1^2 - 1 + 3 = 3$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = n^2 - n + 3$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = (n + 1)^2 - (n + 1) + 3$ (0,5)

linke Seite: $a_{n+1} = a_n + 2n$ (0,5)

$= n^2 - n + 3 + 2n$ (0,5)

$= n^2 + n + 3$ (0,5)

rechte Seite: $(n + 1)^2 - (n + 1) + 3 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 3$ (0,5)

$= n^2 + n + 3$ (0,5)

= linke Seite (0,5)

Aufgabe 4: explizite Formel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Folge a_n mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ die explizite Formel $a_n = n^2 + 1$ besitzt.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $2 = 1^2 + 1 = 2$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = n^2 + 1$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = (n + 1)^2 + 1$ (0,5)

linke Seite: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ (0,5)

$= n^2 + 1 + 2n + 1$ (0,5)

$= n^2 + 2n + 2$ (0,5)

rechte Seite: $(n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 1 + 1$ (0,5)

$= n^2 + 2n + 2$ (0,5)

= linke Seite (0,5)

Aufgabe 5: explizite Formel (5)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Folge a_n mit $a_1 = 4$ und $a_{n+1} = a_n + 7n + 4$ die explizite Formel $a_n = \frac{1}{2}n(7n + 1)$ besitzt.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (7 \cdot 1 + 1) = 4$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = \frac{1}{2}n(7n + 1)$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(n + 1)(7n + 8)$ (0,5)

linke Seite: $a_{n+1} = a_n + 7n + 4$ (0,5)

$= \frac{1}{2}n(7n + 1) + 7n + 4$ (0,5)

$= \frac{7}{2}n^2 + \frac{15}{2}n + 4$ (0,5)

rechte Seite: $\frac{1}{2}(n + 1)(7n + 8) = \frac{7}{2}n^2 + \frac{15}{2}n + 4$ (1)

= linke Seite (0,5)

Aufgabe 6: explizite Formel (4)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Folge a_n mit $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n - 1$ die explizite Formel $a_n = 2^n + 1$ besitzt.
Lösung:
Induktionsstart n = 1: $3 = 2 + 1 = 3$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Annahme: $a_n = 2^n + 1$ (0,5)
Zu zeigen: $a_{n+1} = 2^{n+1} + 1$ (0,5)
linke Seite: $a_{n+1} = 2a_n - 1$ (0,5)
$= 2 \cdot (2^n + 1) - 1$ (0,5)
$= 2^{n+1} + 2 - 1$ (0,5)
$= 2^{n+1} + 1$ (0,5)
= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 7: explizite Formel (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Folge a_n mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 4a_n + 4^n$ die explizite Formel $a_n = n \cdot 4^{n-1}$ besitzt.
Lösung:
Induktionsstart n = 1: $1 = 1 \cdot 4^0 = 1$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = n \cdot 4^{n-1}$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = (n + 1) \cdot 4^n$ (0,5)
linke Seite: $a_{n+1} = 4a_n + 4^n$ (0,5)
$= 4\, n \cdot 4^{n-1} + 4^n$ (0,5)
$= n \cdot 4^n + 4^n$ (0,5)
$= (n + 1) \cdot 4^n$ (0,5)
= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 8: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$. (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1)

Zu zeigen: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ (1)

linke Seite: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$

$= \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$

$= \frac{n \cdot (n+2) + 1}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{n+1}{n+2}$ = rechte Seite (0,5)

Aufgabe 9: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2$ (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$ (1)

Zu zeigen: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) + (3(n + 1) - 2) = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (3(n + 1) - 1)$ (1)

linke Seite: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) + (3(n + 1) - 2)$

$= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1) + (3(n + 1) - 2)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3n^2 - \frac{1}{2} n + 3n + 3 - 2$ (0,5)

$= \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1$ (0,5)

rechte Seite: $\frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (3(n + 1) - 1)$

$= \frac{1}{2} (n + 1)(3n + 2)$ (0,5)

$= \frac{1}{2} (3n^2 + 5n + 2)$ = linke Seite (0,5)

Aufgabe 10: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1 = \frac{1}{4} 1^2 \cdot 2^2 = 1$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $1 + 8 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2(n + 1)^2$ (0,5)

Zu zeigen: $1 + 8 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2$ (0,5)

linke Seite: $1 + 8 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{1}{4} n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3$ (0,5)

$= \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ (0,5)

$= \frac{1}{4} n^4 + \frac{3}{2} n^3 + \frac{13}{4} n^2 + 3n + 1$ (0,5)

rechte Seite: $\frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2 = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4)$ (0,5)

$= \frac{1}{4} n^4 + \frac{3}{2} n^3 + \frac{13}{4} n^2 + 3n + 1$ (0,5)

= linke Seite (0,5)

Aufgabe 11: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + n) = \frac{1}{2} n(3n + 1)$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1 + 1 = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 4$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + n) = \frac{1}{2} n(3n + 1)$ (0,5)

Zu zeigen: $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + n) + (2n + 2) = \frac{1}{2}(n + 1)(3n + 4)$ (1)

linke Seite: $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + n) + (2n + 2)$

$= \frac{1}{2} n(3n + 1) + (2n + 2)$ (0,5)

$= \frac{1}{2} n(3n + 1) + \frac{1}{2}(4n + 4)$ (0,5)

$= \frac{1}{2}[n(3n + 1) + 4n + 4]$ (0,5)

$= \frac{1}{2}[3n^2 + 5n + 4]$ (0,5)

$= \frac{1}{2}(n + 1)(3n + 4)$ (0,5)

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 12: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $2 + 8 + 24 + 64 + \ldots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $2 = (1 - 1) \cdot 2^{1+1} + 2 = 0 \cdot 4 + 2 = 2$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $2 + 8 + 24 + 64 + \ldots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (0,5)

Zu zeigen: $2 + 8 + 24 + 64 + \ldots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{n+1} = n \cdot 2^{n+2} + 2$ (1)

linke Seite: $2 + 8 + 24 + 64 + \ldots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{n+1}$

$= (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n + 1) \cdot 2^{n+1}$ (1)

$= (n - 1 + n + 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (0,5)

$= (2n) \cdot 2^{n+1} + 2$ (0,5)

$= n \cdot 2^{n+2} + 2$ (0,5)

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 13: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $1 + 4 + 18 + 96 + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Induktionsstart n = 0: $0 \cdot 0! = 0 \cdot 1 = 0 = (0 + 1)! - 1$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $1 + 4 + 18 + 96 + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ (0,5)

Zu zeigen: $1 + 4 + 18 + 96 + \ldots + n \cdot n! + (n + 1)(n + 1)! = (n + 2)! - 1$ (1)

linke Seite: $1 + 4 + 18 + 96 + \ldots + n \cdot n! + (n + 1)(n + 1)!$

$= (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)!$ (0,5)

$= (n + 2)(n + 1)! - 1$ (0,5)

$= (n + 2)! - 1$ (1)

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 14: Summenformel (6)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1(1+1)}{2} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ (0,5)

Zu zeigen: $1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 + (-1)^{n+2} \cdot (n + 1)^2 = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (1)

linke Seite: $1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 + (-1)^{n+2} \cdot (n + 1)^2$

$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} \cdot (n + 1)^2$ (0,5)

$= (-1) \cdot (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^2 \cdot (-1)^n \cdot (n + 1)^2$ (0,5)

$= (-1)^n \cdot \left(-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2\right)$ (0,5)

$= (-1)^n \cdot \left(\frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2}\right)$ (0,5)

$= (-1)^n \cdot \left(\frac{2n^2 + 4n + 2 - n^2 - n}{2}\right)$ (0,5)

$= (-1)^n \cdot \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{2}\right)$ (0,5)

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 15: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ (0,5)

Zu zeigen: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$ (0,5)

linke Seite $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ (0,5)

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} \quad (0{,}5$$

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 16: Summenformel (5)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ für $n \geq 1$

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ (0,5)

Zu zeigen: $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4}$ (0,5)

linke Seite $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

$$= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{n+1}{3n+4} \quad (0{,}5$$

= rechte Seite (0,5)

Aufgabe 17: Summenformel explizit und rekursiv (10)

Beweise, dass $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$ für $n \in \mathbb{N}$

a) mit vollständiger Induktion (5)

b) mit Hilfe der beiden folgenden Formeln:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

Lösung:

a) **Induktionsstart n = 1:** $1 = \frac{1}{6}1(1 + 1)(1 + 2) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3.$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Induktionsannahme $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2).$ (1)

$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$ (1)

$$= \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(n + 3) \quad (2)$$

b) $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}(2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n^2 + n)$ (1)

$= \frac{1}{2}[(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)]$ (1)

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)]$ (1)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n + 1)[3 + 2n + 1]$ (0,5)

$= \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$ (0,5)

Aufgabe 18: Summenformel explizit und rekursiv (10)

Beweise, dass $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ für $n \in \mathbb{N}$

a) mit vollständiger Induktion
b) mit Hilfe der beiden folgenden Formeln:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

Lösung:

a) **Induktionsstart n = 1:** $2 = \frac{1}{3}1(1 + 1)(1 + 2) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$ (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Induktionsannahme $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$ (1)

$2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2) + (n + 1)(n + 2).$ (1)

$= \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ (2)

b) $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) = 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n^2 + n$ (1)

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$ (1)

$= \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ (1)

$= \frac{1}{6}n(n + 1)[3 + 2n + 1]$ (0,5)

$= \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ (0,5)

Aufgabe 19: Kombinatorik (4)

An einem Fest nehmen $n \geq 1$ **Paare** teil. Dabei werden alle **Personen** mit Ausnahme des eigenen Partners mit begrüßt. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dabei insgesamt $2n^2 - 2n$ Begrüßungen stattfinden.

Lösungen zu den Aufgaben 6 und 7 (3 + 3)

1. Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip für Aussagen A_n, die in Abhängigkeit von einem natürlichen Parameter $n \in \mathbb{N}$ getroffen werden.
   Beispiel Aufgabe 2: Bei n Paaren finden $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen statt, wobei $n \in \mathbb{N}$. (1 + 0)
2. Induktionsstart $n = n_0$: Man beweist zunächst A_{n0} für der kleinsten Wert n_0, den n annehmen kann.
   Beispiel Aufgabe 2: Bei $n_0 = 1$ Paar findet $2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0$ Begrüßung statt. Die Aussage A_{n0} gilt offensichtlich. (1 + 1)
3. Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$: Man beweist A_{n+1} unter der Induktionsvoraussetzung, dass A_n gilt.
   Beispiel Aufgabe 2: Induktionsvoraussetzung: Bei n Paaren finden $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen statt. Zu zeigen ist: Bei n + 1 Paaren finden $B_{n+1} = 2(n + 1)^2 - 2(n + 1) = 2n^2 + 4n + 2 - 2n - 2 = 2n^2 + 2n$ Begrüßungen statt. Beweis: Beide Partner des n + 1-ten Paares begrüßen alle 2 n bereits anwesende Personen. Es finden also $2 \cdot 2n = 4$ n zusätzliche Begrüßungen statt. Nach Induktionsvoraussetzung haben unter den n bereits anwesenden Paaren $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen stattgefunden, so dass sich zusammen $B_{n+1} = B_n + 4n = 2n^2 + 2n$ Begrüßungen ergeben. Dies entspricht der Behauptung. (1 + 2)

Aufgabe 20: n-te Ableitung (4)

Beweise durch vollständige Induktion, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$; $x \in \mathbb{R}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ besitzt.

Lösung

Induktionsstart n = 1: $f(x) = x\cdot e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = 1\cdot e^{-x} - x\cdot e^{-x} = \frac{(-1)(x-1)}{e^x}$ (Produktregel) (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$: Induktionsannahme $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$ (0,5)

$$\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n(1\cdot e^{-x} - (x-n)e^{-x}) \quad (1)$$
$$= (-1)^n(n+1-x)e^{-x} \quad (0,5)$$
$$= (-1)^{n+1}(x-(n+1))e^{-x} \quad (0,5)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x} \quad (0,5)$$

Aufgabe 21: Teilbarkeit (4)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Glieder der Folge a_n mit $a_1 = 14$ und $a_{n+1} = 2a_n - 7$ durch 7 teilbar sind.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $a_1 = 14 = 2\cdot 7$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = m\cdot 7$ mit $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = m'\cdot 7$ mit $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)
linke Seite: $a_{n+1} = 2a_n - 7$ (0,5)

$= 2\cdot m\cdot 7 - 7$ (0,5)

$= (2m - 1)\cdot 7$ (0,5)

$= m'\cdot 7$ mit $m' = 2m - 1$ (0,5)

Aufgabe 22: Teilbarkeit (4)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Glieder der Folge a_n mit $a_1 = 60$ und $a_{n+1} = 3a_n + 45$ durch 15 teilbar sind.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $a_1 = 60 = 4\cdot 15$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $a_n = m\cdot 15$ mit $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $a_{n+1} = m'\cdot 15$ mit $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)
linke Seite: $a_{n+1} = 3a_n + 45$ (0,5)

$= 3\cdot m\cdot 15 + 45$ (0,5)

$= (3m + 3)\cdot 15$ (0,5)

$= m'\cdot 15$ mit $m' = 3m + 3$ (0,5)

Aufgabe 23: Teilbarkeit (4)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass **kein** Glied der Folge a_n mit $a_1 = 6$ und $a_{n+1} = 3a_n - 8$ durch 4 teilbar ist.
Lösung:
Induktionsstart n = 1: a_1 ist nicht durch 4 teilbar (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Annahme: a_n ist nicht durch 4 teilbar (0,5)
Zu zeigen: a_{n+1} ist nicht durch 4 teilbar (0,5)
linke Seite: $a_{n+1} = 3a_n - 8$ (0,5)
da 3 eine Primzahl ist und a_n nicht den Teiler 4 enthält, gilt dies auch für das Produkt $3a_n$. (1)
da 8 die 4 als Teiler enthält und $3a_n$ nicht die 4 als Teiler enthält, lässt sich 4 nicht aisklammern und $a_{n+1} = 3a_n - 8$ ist ebenfalls nicht durch 4 teilbar. (1)

Aufgabe 24: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $n^3 + 2n$ für **alle** $n \geq 1$ durch 3 teilbar ist.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1^3 + 1 \cdot 1 = 3 = 1 \cdot 3$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $n^3 + 2n = m \cdot 3$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $(n + 1)^3 + 2(n + 1) = m' \cdot 15$ mit $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)

linke Seite: $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$ (0,5)

$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$ (0,5)

$= m \cdot 3 + 3(n^2 + n + 1)$ (0,5)

$= (m + n^2 + n + 1) \cdot 3$ (0,5)

$= m' \cdot 3$ mit $m' = m + n^2 + n + 1$ (0,5)

Aufgabe 25: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $9^n + 15$ für **alle** $n \geq 1$ durch 24 teilbar ist.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $9^1 + 15 = 24$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $9^n + 15 = m \cdot 24$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $9^{n+1} + 15 = m' \cdot 24$ für ein $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)

linke Seite: $9^{n+1} + 15$ $= 9 \cdot 9^n + 9 \cdot 15 - 8 \cdot 15$ (0,5)

$= 9(9^n + 15) - 5 \cdot 24$ (0,5)

$= 9 \cdot m \cdot 24 - 5 \cdot 24$ (0,5)

$= (9m - 5) \cdot 24$ (0,5)

$= m' \cdot 24$ mit $m' = 9m - 5$ (0,5)

Aufgabe 26: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $10^{2n} + 1$ für **kein** $n \in \mathbb{N}$ durch 11 teilbar ist.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $10^2 + 1 = 101$ ist nicht durch 11 teilbar (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $10^{2n} + 1$ ist nicht durch 11 teilbar (0,5)

Zu zeigen: $10^{2n+2} + 1$ ist nicht durch 11 teilbar (0,5)

linke Seite: $10^{2n+2} + 1 = 100(10^{2n} + 1) - 99$ (0,5)

da 11 eine Primzahl ist und weder 100 noch $10^{2n} + 1$ den Teiler 11 enthalten, gilt dies auch für das Produkt $100(10^{2n} + 1)$. (1)

da 99 die 11 als Teiler enthält und $100(10^{2n} + 1)$ nicht die 11 als Teiler enthält, lässt sich 11 nicht ausklammern und $10^{2n+2} + 1$ ist ebenfalls nicht durch 11 teilbar. (1)

Aufgabe 27: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $7^n - 1$ für **alle** $n \geq 1$ durch 6 teilbar ist.
Lösung:

Induktionsstart n = 1: $7^1 - 1 = 1 \cdot 6$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $7^n - 1 = m \cdot 6$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $7^{n+1} - 1 = m' \cdot 6$ für ein $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)

linke Seite: $7^{n+1} - 1$ $= 7 \cdot 7^n - 7 + 7 - 1$ (0,5)

$= 7(7^n - 1) + 6$ (0,5)

$= 7 \cdot m \cdot 6 + 6$ (0,5)

$= (7m + 1) \cdot 6$ (0,5)

$= m' \cdot 6$ mit $m' = 7m + 1$ (0,5)

Aufgabe 28: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $9^n - 1$ für **alle** $n \geq 1$ durch 8 teilbar ist.
Lösung:
Induktionsstart n = 1: $9^1 - 1 = 1 \cdot 8$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $9^n - 1 = m \cdot 8$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $9^{n+1} - 1 = m' \cdot 8$ für ein $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)

linke Seite: $9^{n+1} - 1 = 9 \cdot 9^n - 9 + 9 - 1$ (0,5)
$= 9(9^n - 1) + 8$ (0,5)
$= 9 \cdot m \cdot 8 + 8$ (0,5)
$= (9m + 1) \cdot 8$ (0,5)
$= m' \cdot 8$ mit $m' = 9m + 1$ (0,5)

Aufgabe 29: Teilbarkeit (4)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ für **alle** $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.
Lösung:
Induktionsstart n = 0: $2^2 + 3^1 = 1 \cdot 7$ (0,5)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Annahme: $2^{n+2} + 3^{2n+1} = m \cdot 7$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (0,5)

Zu zeigen: $2^{n+3} + 3^{2n+3} = m' \cdot 7$ für ein $m' \in \mathbb{N}$ (0,5)
linke Seite: $2^{n+3} + 3^{2n+3} = 2 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{2n+1} + 9 \cdot 3^{2n+1}$ (0,5)
$= 2(2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 7 \cdot 3^{2n+1}$ (0,5)
$= 2 \cdot m \cdot 7 + 7 \cdot 3^{2n+1}$ (0,5)
$= (2m + 3^{2n+1}) \cdot 7$ (0,5)
$= m' \cdot 7$ mit $m' = 2m + 3^{2n+1}$ (0,5)