

## 5.7. Folgen

Die Beschreibung **natürlicher Wachstumsvorgänge** bei z.B. Populationen von Atomen, Bakterien oder Menschen, Anlagebeträgen, Börsenkursen oder Verkaufszahlen durch **stetige Funktionen** und **Differentialgleichungen** (siehe 1.9. und 2.6.) stellt eine teilweise recht grobe Vereinfachung dar, weil sich solche Bestände nicht kontinuierlich, sondern in **bestimmtem Zeitabständen sprunghaft** verändern. Viele dieser Vorgänge werden daher durch **Folgen** realistischer beschrieben.

### 5.7.1. Rekursive und explizite Darstellung von Folgen

*Beispiel. Aufgaben zu Folgen Nr. 1*

#### Definition

Eine Funktion mit  $D = \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$  nennt man **Folge**. Anstelle der Variablen  $x$  verwendet man den **Index  $n$** ; die Funktionswerte  $f(x)$  werden als **Folgenglieder  $a_n$**  bezeichnet.

#### Beispiel:

$f(x) = 2x - 3$  mit  $D = \mathbb{R}$  ist eine Funktion

$a_n = 2n - 3$  mit  $D = \mathbb{N}$  ist eine Folge

*Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 2*

#### Definition

1. Eine **explizite** (ausdrückliche) Formel gibt  $a_n$  in Abhängigkeit des **Indizes  $n$**  an. Jedes beliebige Folgenglied lässt sich einfach durch Einsetzen von  $n$  in die explizite Formel ausrechnen.
2. Eine **rekursive** (rückläufige) Formel gibt  $a_{n+1}$  in Abhängigkeit des **vorherigen Folgengliedes  $a_n$**  an. Das  $n+1$ -te Folgenglied lässt sich erst berechnen, wenn **alle vorherigen Folgenglieder** bekannt sind. Für die Berechnung von  $a_1$  benötigt man außerdem die Angabe eines **Startwertes  $a_0$** .

#### Beispiel: exponentielles Wachstum in expliziter und rekursiver Darstellung (siehe 4.7.4.)

Ein Kapital von  $a_0 = 1000$  € wächst jedes Jahr um 15 %. Geben Sie einerekursive und eine explizite Darstellung für das Kapital  $a_n$  nach  $n$  Jahren an.

#### Lösung:

**rekursiv:**  $a_{n+1} = a_n + 0,15 a_n = 1,15 \cdot a_n$  mit  $a_0 = 1000$

**explizit:**  $a_n = 1,15 \cdot a_{n-1} = 1,15^2 \cdot a_{n-2} = \dots = 1,15^n \cdot a_0 = 1,15^n \cdot 1000$ .

#### Beispiele für Näherungsfolgen aus der Analysis

1. rekursive Näherung der Quadratwurzel  $\sqrt{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  mit  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  (siehe 5.7.5)
2. rekursive Näherung der Kreiszahl  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  mit  $\pi_{2n} = n \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left( \frac{\pi_n}{n} \right)^2}}$  (siehe 5.7.6 und 5.7.7)
3. explizite Näherung der Exponentialzahl  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$  mit  $e_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  (siehe 5.7.8)
4. rekursive Näherung einer Nullstelle  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  mit  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  (siehe 5.3.6)

#### Definition.

1. Eine Folge der Form  $a_n = d + a_{n-1} = d + d + a_{n-2} = \dots = nd + a_0$  beschreibt eine **lineare Veränderung** mit **gleichen Differenzen**  $d = a_n - a_{n-1}$  und heißt **arithmetische Folge**.
2. Eine Folge der Form  $a_n = q \cdot a_{n-1} = q \cdot q \cdot a_{n-2} = \dots = q^n \cdot a_0$  beschreibt eine **exponentielle Veränderung** mit **gleichen Quotienten**  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  und heißt **geometrische Folge**.

*Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 3*

**Beispiel für die Bestimmung einer rekursiven Darstellung aus einer expliziten Formel**

Gib eine rekursive Darstellung für die Folge  $a_n = n^3 - 3n^2$  an.


**Lösung:**

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [(n+1)^3 - 3(n+1)^2] - [n^3 - 3n^2] \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 - n^3 + 3n^2 \\ &= 3n^2 - 3n - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 3n - 2 \text{ mit } a_0 = 0$$

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 4

**Summenformel von Leibnitz**

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$


**Beispiel für die Bestimmung einer expliziten Folge aus einer rekursiven Darstellung**

Gib eine explizite Formel für die Folge  $a_{n+1} = a_n + 4n - 2$  mit  $a_0 = 1$  an.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 4(n-1) - 2 \\ &= a_{n-1} + 4n - 6 \\ &= a_{n-2} + 4(n-1) + 4n - 6 - 6 \\ &= a_{n-3} + 4(n-2) + 4(n-1) + 4n - 6 - 6 - 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$= a_0 + 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n \cdot 6 = 4 \cdot \frac{1}{2} n \cdot (n+1) - 6n \quad | \text{ Summenformel von Leibnitz}$$

$$= 1 + 2n^2 + 2n - 6n$$

$$= 1 + 2n^2 - 4n$$

$$= 2n(n-2) + 1$$

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 5

**5.7.2. Monotonie und Beschränktheit einer Folge (siehe auch 5.3.1.)****Definition**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- **monoton zunehmend**, wenn  $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
- **monoton abnehmend**, wenn  $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Beispiel:**

Untersuche die Folge  $a_n = n^3 - 16n$  auf Monotonie

**Lösung:**

$a_{n+1} - a_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 16n - 16 - n^3 + 16n = 3n^2 + 3n - 15 = 3(n^2 + n - 5) > 0$  für  $n \geq 3 \Rightarrow a_n$  steigt  
monoton für  $n \geq 3$ . Für  $n < 3$  nimmt sie ab.

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 6

**Definition**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn  $a_n \leq S$
- **nach unten beschränkt**, wenn  $a_n \geq S$

für eine obere bzw. untere **Schranke**  $S \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$

**Beispiel:**

Untersuche die Folge  $a_n = n^4 \cdot 2^{-n}$  auf Beschränktheit und begründe.

**Lösung:**

$a_n$  ist nach unten beschränkt, da  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $a_n$  ist nach oben beschränkt, da  $a_n < 100 \Leftrightarrow n^4 \cdot 2^{-n} < 100 \Leftrightarrow n^4 < 100 \cdot 2^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Zur Begründung kann auch die entsprechenden Funktion  $f(x) = x^4 \cdot 2^{-x} = x^4 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x}$  für  $x > 0$  herangezogen werden: Wegen

$$f'(x) = 4x^3 e^{-\ln 2 \cdot x} + x^4 (-\ln 2) e^{-\ln 2 \cdot x} = (4 - \ln 2 \cdot x) x^3 e^{-\ln 2 \cdot x}$$

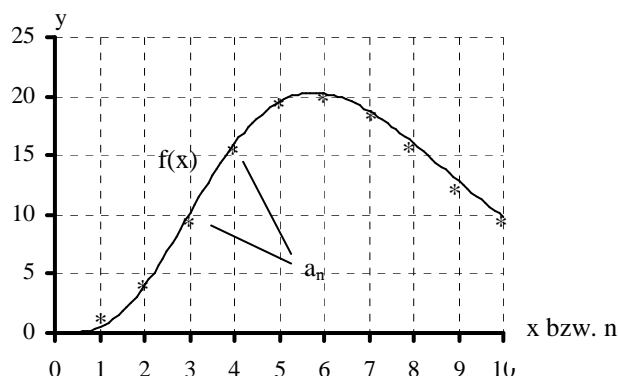
(Ketten- und Produktregel siehe 2.4.1. - 2.4.3.)

wird der Hochpunkt bei  $x = \frac{4}{\ln 2} \approx 5,78$  erreicht, d.h.

bei der entsprechenden Folge werden die maximalen Werte bei  $n = 5$  mit  $a_5 = 19,53$  und  $n = 6$  mit  $a_6 \approx 20,25$  erreicht.

Da Exponentialfunktionen schneller wachsen als alle Potenzfunktionen oder mit l'Hospital (siehe 2.4.4.)

begründet man außerdem, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{2^x} = 0$ .



Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 7

**5.7.3. Grenzwert einer Folge für  $n \rightarrow \infty$  (siehe auch 5.1.1.)**

**Definition**

Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen den Grenzwert  $a$ , wenn es für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon$  gibt, so dass alle Folgenglieder jenseits von  $n_\varepsilon$  um weniger als  $\varepsilon$  vom Grenzwert abweichen:  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Man schreibt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

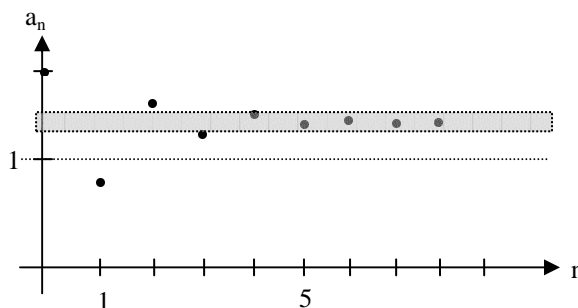
**Beispiel**

Von welchem  $n_\varepsilon$  an liegen die Glieder der Folge  $a_n = (-2)^{-n} + 1$  um weniger als  $\varepsilon = 0,1$  bzw.  $0,01$  bzw.  $0,001$  vom Grenzwert  $a = 1$  ab?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \\ |(-2)^{-n}| &< \varepsilon \\ 2^{-n} &< \varepsilon \\ -n \ln 2 &< \ln \varepsilon \\ n &> -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \end{aligned}$$

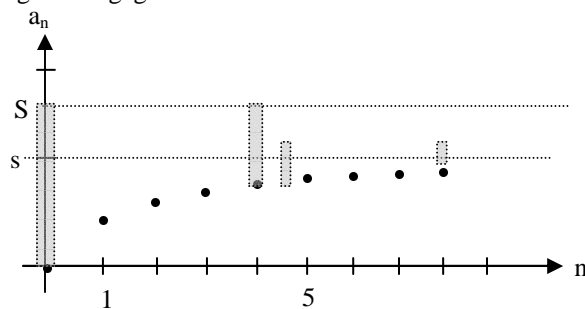
$\Rightarrow n_{0,1} = 4, n_{0,01} = 7$  und  $n_{0,001} = 10$



Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 8

**Satz:** Wenn eine Folge monoton und beschränkt ist, so konvergiert sie gegen einen Grenzwert.

**Beweis:** Angenommen,  $(a_n)$  ist monoton steigend und durch  $S$  nach oben beschränkt. Dann läßt sich mit der folgenden rekursiv definierten Intervallschachtelung die kleinste obere Schranke  $s$  bestimmen.  $I_0 = [a_0; S]$  und  $I_n =$  obere Hälfte von  $I_{n-1}$ , falls in dieser noch Folgenglieder liegen bzw. untere Hälfte von  $I_{n-1}$ , falls in der oberen Hälfte keine Folgenglieder mehr liegen. Die Intervallgrenzen konvergieren wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gegen genau einen Grenzwert  $s$ .  $s$  ist kleinste obere Schranke von  $(a_n)$ , denn die Intervalle wurden so gebildet, das jeweils die obere Grenze eine obere Schranke der Folge ist, die untere Grenze aber nicht.



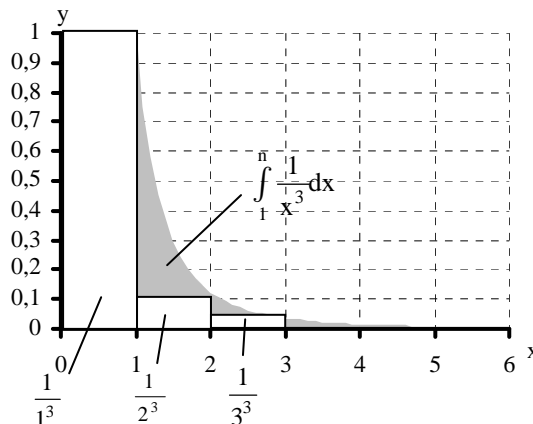
### Beispiel zur Untersuchung einer Folge auf Konvergenz

Untersuche die Folge  $a_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$  mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

#### Lösung

$a_n$  ist nach unten beschränkt, da  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $a_n$  ist nach oben beschränkt, da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \\ &< 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx \\ &= 1 + \left[ -\frac{2}{x^2} \right]_1^n \\ &= 1 - \frac{2}{n^2} + 2 \\ &= 3 - \frac{2}{n^2} \\ &< 3 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



$a_n$  ist monoton steigend, da  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^3} < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $a_n$  muss daher gegen einen Grenzwert

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 3$  konvergieren. Der Grenzwert dieser Folge ist bis heute nicht genau bekannt!!

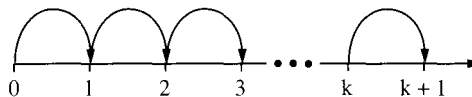
Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 9

### 5.7.4. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

#### Beweisverfahren der vollständigen Induktion (Rekursionsbeweis)

Eine Formel, die für alle  $n \in \mathbb{N}$  gültig sein soll, lässt sich beweisen, indem man

1. Die Formel für  $n = 0$  beweist (**Induktionsanfang**)
2. Die Formel für ein beliebiges  $n$  voraussetzt und mit dieser Annahme die Formel für  $n + 1$  beweist. (**Induktionsschritt**)



**Beispiel:** (Leibniz-Summenformel)

**Satz:** für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$

**Beweis:**

**Induktionsanfang**  $n = 1$ :  $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$

**Induktionsschritt**  $n \Rightarrow n + 1$ :

**Induktionsannahme für ein beliebiges n:**  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$

**zu zeigen ist die Behauptung für n + 1:**  $1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2)$

**Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{1}{2} n(n + 1) + n + 1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1$$

**Rechte Seite:**  $\frac{1}{2} (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1$  **qed**

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 10