

### 6.3. Aufgaben zu Matrizengleichungen

#### Aufgabe 1: Invertierung

Bestimme, falls möglich, die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R},$$

#### Aufgabe 2: Matrizengleichungen

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf:

- a)  $A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot (X + C)$       d)  $(A \cdot X^T)^T - X \cdot B + 3 \cdot X = E$   
 b)  $2 \cdot A \cdot X + 3 \cdot B = 4 \cdot (X - C)$       e)  $2 \cdot A \cdot X + B \cdot X - 3 \cdot C = 2 \cdot (X - C) + 3 \cdot B$   
 c)  $3A \cdot X - 4 \cdot B = X - C$       f)  $(A \cdot B) \cdot (A \cdot X \cdot B)^{-1} = E$

#### Aufgabe 3: Matrizengleichungen

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Matrizengleichungen:

a)  $A \cdot X + B = A$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $X \cdot B + 2 \cdot X = B$  mit  $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

c)  $4 \cdot X - X \cdot A = X \cdot A - X \cdot C^T + 3 \cdot (B + X)$  mit  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d)  $2 \cdot A^T \cdot X + 2 \cdot X = B + X$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e)  $B \cdot (A \cdot X)^T = B \cdot A - 2 \cdot E$  mit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

#### Aufgabe 4: Matrizengleichung mit Parameter

Gegeben ist die Matrix  $A_t = \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 \\ -3 & 1 & t-1 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Zeige durch Umformung der Matrizengleichung

$3 \cdot A_1^{-1} \cdot X = A_1^{-1} - A_1 \cdot X$ , dass  $X = (3 \cdot E + A_1^2)^{-1}$  und berechne X.

