

## 7.0. Abstände und Winkel in der Ebene

### 7.0.1. Schnittwinkel zweier Geraden

#### Schnittwinkel von Geraden

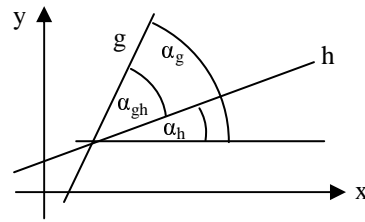
Den **Schnittwinkel**  $\alpha_{gh}$  zweier Geraden

$$g(x) = a_1x + b_1 \text{ und}$$

$$h(x) = a_2x + b_2$$

erhält man aus der Differenz der Steigungswinkel:

$$\alpha_{gh} = \alpha_g - \alpha_h = \tan^{-1}(a_1) - \tan^{-1}(a_2).$$



Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 1

### 7.0.2. Abstand und Mittelpunkt zwischen zwei Punkten

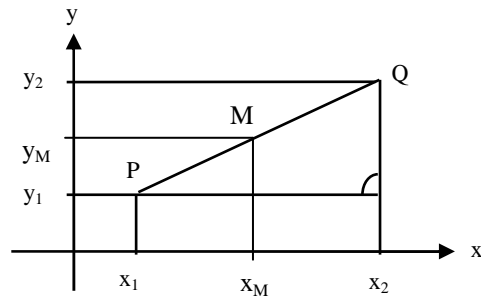
#### Abstand und Mittelpunkt zwischen zwei Punkten

Der **Abstand** zwischen Punkten  $P(x_1|y_1)$  und  $Q(x_2|y_2)$  ist

$$\text{nach Pythagoras } |PQ| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Der **Mittelpunkt** zwischen den beiden Punkten hat die

$$\text{Koordinaten } M(x_M|y_M) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



#### Beispiel:

Berechne Länge und Mittelpunkt aller drei Seiten des Dreiecks ABC mit  $A(-3|-1)$ ,  $B(2|-2)$  und  $C(1|1)$ .

#### Lösung:

$$|AB| = \sqrt{26} \text{ und } M_{AB}\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{3}{2}\right), |BC| = \sqrt{10} \text{ und } M_{BC}\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}\right), |CA| = \sqrt{20} \text{ und } M_{CA}(-1|0).$$

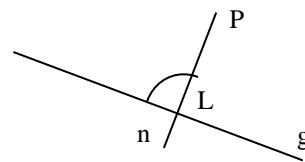
Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 3

### 7.0.3. Abstand zwischen eines Punktes von einer Geraden

#### Abstand zwischen eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand eines Punktes P zu der Geraden g ist die Entfernung zwischen P und dem **Lotfußpunkt** L von P auf g.

L ist der Schnittpunkt der **Orthogonalen oder Normalen**  $n(x)$  zu g durch P.



#### Beispiel:

Berechne den Abstand des Punkte  $P(1|2)$  zur Geraden  $g(x) = 2x - 3$ .

#### Lösung:

- Normale n zu g durch P aufstellen:  $n(x) = ax + b$  mit  $a = -\frac{1}{2}$  und  $n(1) = 2 \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2}$   
 $\Leftrightarrow n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .
- Lotfußpunkt  $L = g \cap n$  durch Gleichsetzen berechnen:  $g(x) = n(x) \Rightarrow 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{5}$ . Den y-Wert erhält man durch Einsetzen:  $y = g\left(\frac{11}{5}\right) = \frac{7}{5}$  oder  $y = n\left(\frac{11}{5}\right) = \frac{7}{5}$  (Probe)  
 $\Leftrightarrow L\left(\frac{11}{5} \mid \frac{7}{5}\right)$ .

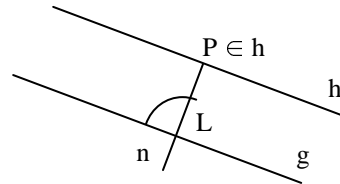
$$3. \text{ Der gesuchte Abstand ist } d = \overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{11}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{5}-2\right)^2} = 3 \text{ LE}$$

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 4

### 7.0.4. Abstand zwischen zwei parallelen Geraden

#### Abstand zwischen zwei Geraden

Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden  $g$  und  $h$  ist der Abstand eines beliebigen Punktes  $P$  der einen Geraden zur anderen Geraden.



#### Beispiel:

Berechne den Abstand der beiden Geraden  $g(x) = 2x - 3$  und  $h(x) = 2x + 5$

#### Lösung:

1. Einen beliebigen Punkt aus  $h$  wählen, z.B.  $P(0|5)$

2. Normale  $n$  zu  $g$  durch  $P$  aufstellen:  $n(x) = ax + b$  mit  $a = -\frac{1}{2}$  und  $n(0) = 5 \Leftrightarrow b = 5$

$$\Leftrightarrow n(x) = -\frac{1}{2}x + 5.$$

3. Lotfußpunkt  $L = g \cap n$  durch Gleichsetzen berechnen:  $g(x) = n(x) \Rightarrow 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 8 \Rightarrow x =$

$$\frac{16}{5}. \text{ Den y-Wert erhält man durch Einsetzen: } y = g\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{17}{5} \text{ oder } y = n\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{17}{5} \text{ (Probe)}$$

$$\Leftrightarrow L\left(\frac{16}{5} \mid \frac{17}{5}\right).$$

4. Der gesuchte Abstand ist  $d = \overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{17}{5}-5\right)^2} = 8 \text{ LE}$

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 6 und 7

### 7.0.5. Vektoren in der Ebene

Vektoren mit zwei Komponenten lassen sich geometrisch als **Verschiebungen** in der Ebene interpretieren.

#### Beispiel:

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

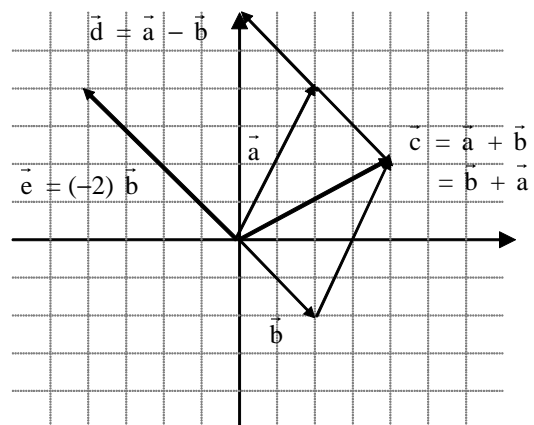
Zeichne die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  und  $\vec{e} = -2\vec{a}$  in ein gemeinsames Koordinatensystem und bestimme ihre Komponenten.

#### Lösung:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



### Geometrische Deutung von Vektoren mit zwei Komponenten

Der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  wird als **Verschiebung** um  $a_x$  in x-Richtung und  $a_y$  in y-Richtung aufgefasst. Der **Ausgangspunkt** dieser Verschiebung ist dabei nicht festgelegt. Liegt der Ausgangspunkt im Koordinatenursprung  $O(0|0)$ , so heißt a **Ortsvektor** und endet im Punkt  $P(a_x|a_y)$ :  $\vec{OP} = \vec{a}$ .

### Geometrische Deutung der Vektorrechnung für zwei Komponenten:

Die **Summe**  $\vec{a} + \vec{b}$  erhält man durch Hintereinanderausführen (**Hintereinanderlegen**) der beiden Verschiebungen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Das **Produkt**  $r \cdot \vec{a}$  erhält man durch **Streckung** bzw. Stauchung der Verschiebung  $\vec{a}$  um den Faktor  $r$ . Für  $r < 0$  dreht sich die Verschiebungsrichtung um.

Die **Differenz** zweier Vektoren  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  erhält man, indem man  $\vec{b}$  **umdreht** und dann zu  $\vec{a}$  addiert. Zeichnet man  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  als Ortsvektoren, so ist  $\vec{a} - \vec{b}$  die Verschiebung, die vom Endpunkt von  $\vec{b}$  zum Endpunkt von  $\vec{a}$  führt.

### Beispiel:

Gegeben ist der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Gib jeweils zwei weitere Vektoren an, die

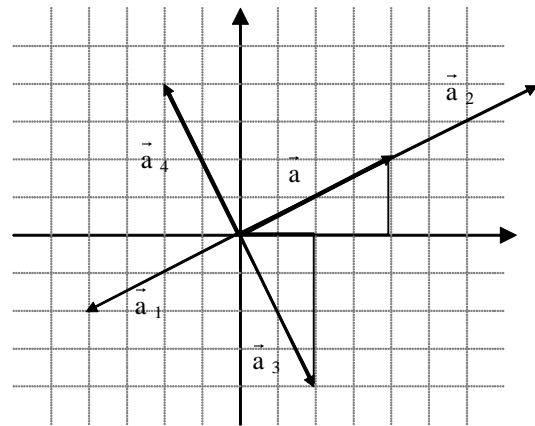
- parallel
- orthogonal

zu  $\vec{a}$  gerichtet sind.

### Lösung:

Z. B.  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Z. B.  $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



### Parallele und orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$  sind

- **parallel**, wenn  $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  (Verschiebung in x- und y-Richtung im **gleichen** Verhältnis)
- **orthogonal**, wenn  $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$  (Verschiebung in x- und y-Richtung im **entgegengesetzten** Verhältnis)

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 8

## 7.0.6. Parameterform der Geradengleichung in der Ebene

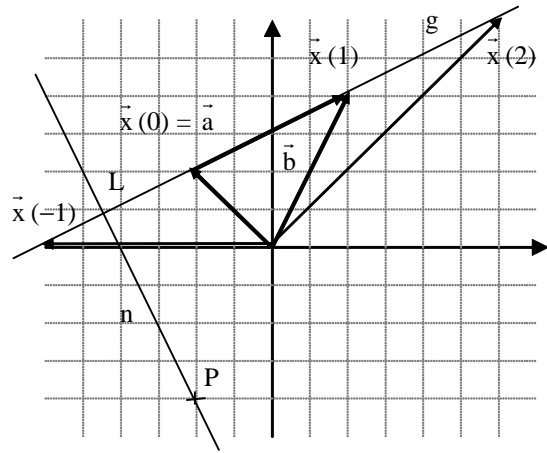
### Beispiel:

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $r \in \mathbb{R}$ .

- Zeichne die Ortsvektoren  $\vec{x}(r)$  für  $r \in \{-1; 0; 1; 2\}$  in ein Koordinatensystem
- Formuliere die Geradengleichung in Koordinatenform  $g(x) = ax + b$
- Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden  $f$  an, die parallel zu  $g$  verläuft.
- Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden  $h$  an, die orthogonal zu  $g$  verläuft.
- Bestimme den Abstand des Punktes  $P(-1|-2)$  zur Geraden  $g$ .

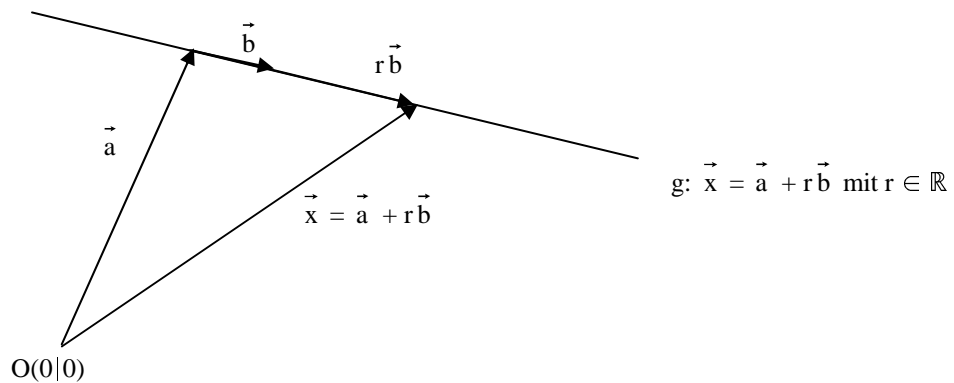
**Lösung:**

- a)  $\vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b)  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- c) Z.B. f:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  bzw.  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- d) Z.B. h:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  bzw.  $h(x) = -2x + 1$ .
- e) Lotgerade zu g durch P ist  $n(x) = -2x - 4$   
 mit Lotfußpunkt  $L(-\frac{11}{5} | \frac{2}{5}) \Leftrightarrow d = \overline{PL} = \frac{6}{\sqrt{5}}$  LE



**Parameterform der Geradengleichung in der Ebene**

Eine Geradendarstellung in der Form  $g: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  heißt **Parameterform** der Geradengleichung mit dem **Stützvektor**  $\vec{a}$ , dem **Richtungsvektor**  $\vec{b}$  und dem **Parameter**  $r$ .



Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 9 und 10