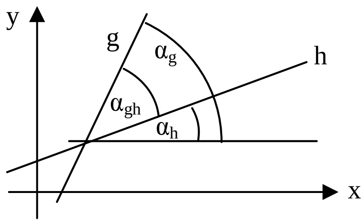
7.0. Abstände und Winkel in der Ebene

7.0.1. Schnittwinkel zweier Geraden

Schnittwinkel von Geraden
Den **Schnittwinkel** α_{gh} zweier Geraden
$g(x) = a_1x + b_1$ und
$h(x) = a_2x + b_2$
erhält man aus der Differenz der Steigungswinkel:
$\alpha_{gh} = \alpha_g - \alpha_h = \tan^{-1}(a_1) - \tan^{-1}(a_2)$.

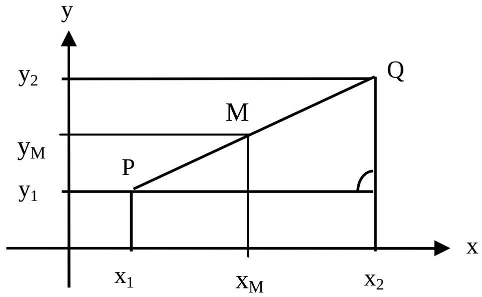


Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 1

7.0.2. Abstand und Mittelpunkt zwischen zwei Punkten

Abstand und Mittelpunkt zwischen zwei Punkten
Der **Abstand** zwischen Punkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$.ist nach **Pythagoras** $|PQ| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

Der **Mittelpunkt** zwischen den beiden Punkten hat die Koordinaten $M(x_M|y_M) = M(\frac{x_1 + x_2}{2} | \frac{y_1 + y_2}{2})$.

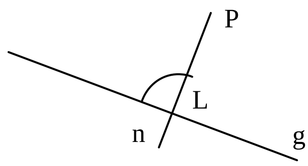


Beispiel::
Berechne Länge und Mittelpunkt aller drei Seiten des Dreiecks ABC mit $A(-3|-1)$, $B(2|-2)$ und $C(1|1)$.
Lösung:
$|AB| = \sqrt{26}$ und $M_{AB}(-\frac{1}{2} | -\frac{3}{2})$., $|BC| = \sqrt{10}$ und $M_{BC}(\frac{3}{2} | -\frac{1}{2})$., $|CA| = \sqrt{20}$ und $M_{CA}(-1|0)$.

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 3

7.0.3. Abstand zwischen eines Punktes von einer Geraden

Abstand zwischen eines Punktes von einer Geraden
Der Abstand eines Punktes P zu der Geraden g ist die Entfernung zwischen P und dem **Lotfußpunkt** L von P auf g.
L ist der Schnittpunkt der **Orthogonalen oder Normalen** n(x) zu g durch P.



Beispiel:
Berechne den Abstand des Punkte $P(1|2)$ zur Geraden $g(x) = 2x - 3$.
Lösung:

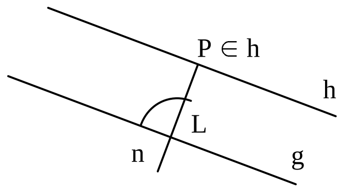
1. Normale n zu g durch P aufstellen: $n(x) = ax + b$ mit $a = -\frac{1}{2}$ und $n(1) = 2 \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
2. Lotfußpunkt $L = g \cap n$ durch Gleichsetzen berechnen: $g(x) = n(x) \Rightarrow 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{5}$. Den y-Wert erhält man durch Einsetzen: $y = g(\frac{11}{5}) = \frac{7}{5}$ oder $y = n(\frac{11}{5}) = \frac{7}{5}$ (Probe) $\Leftrightarrow L(\frac{11}{5} | \frac{7}{5})$.

3. Der gesuchte Abstand ist $d = \overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{11}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{5}-2\right)^2} = 3$ LE

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 4

7.0.4. Abstand zwischen zwei parallelen Geraden

Abstand zwischen zwei Geraden
Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden g und h ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der einen Geraden zur anderen Geraden.



Beispiel:
Berechne den Abstand der beiden Geraden $g(x) = 2x - 3$ und $h(x) = 2x + 5$
Lösung:

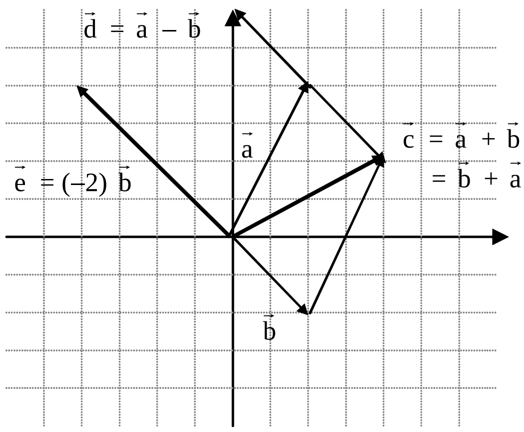
1. Einen beliebigen Punkt aus h wählen, z.B. $P(0|5)$
2. Normale n zu g durch P aufstellen: $n(x) = ax + b$ mit $a = -\frac{1}{2}$ und $n(0) = 5 \Leftrightarrow b = 5$ $\Leftrightarrow n(x) = -\frac{1}{2}x + 5$.
3. Lotfußpunkt $L = g \cap n$ durch Gleichsetzen berechnen: $g(x) = n(x) \Rightarrow 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$. Den y-Wert erhält man durch Einsetzen: $y = g(\frac{16}{5}) = \frac{17}{5}$ oder $y = n(\frac{16}{5}) = \frac{17}{5}$ (Probe) $\Leftrightarrow L(\frac{16}{5} | \frac{17}{5})$.
4. Der gesuchte Abstand ist $d = \overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{17}{5}-5\right)^2} = 8$ LE

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 6 und 7

7.0.5. Vektoren in der Ebene

Vektoren mit zwei Komponenten lassen sich geometrisch als **Verschiebungen** in der Ebene interpretieren.

Beispiel:
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Zeichne die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{e} = -2\vec{a}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und bestimme ihre Komponenten.



Lösung:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-2)\cdot 1\\(-2)\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

Geometrische Deutung von Vektoren mit zwei Komponenten

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird als **Verschiebung** um a_x in x-Richtung und a_y in y-Richtung aufgefasst. Der **Ausgangspunkt** dieser Verschiebung ist dabei nicht festgelegt. Liegt der Ausgangspunkt im Koordinatenursprung O(0|0), so heißt a **Ortsvektor** und endet im Punkt $P(a_x|a_y)$: $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$.

Geometrische Deutung der Vektorrechnung für zwei Komponenten:

Die **Summe** $\vec{a} + \vec{b}$ erhält man durch Hintereinanderausführen (**Hintereinanderlegen**) der beiden Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das **Produkt** $r\cdot\vec{a}$ erhält man durch **Streckung** bzw. Stauchung der Verschiebung $\vec{a}$ um den Faktor r. Für r < 0 dreht sich die Verschiebungsrichtung um.

Die **Differenz** zweier Vektoren $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ erhält man, indem man b **umdreht** und dann zu $\vec{a}$ addiert. Zeichnet man $\vec{a}$ und b als Ortsvektoren, so ist $\vec{a} - \vec{b}$ die Verschiebung, die vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ führt.

Beispiel:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gib jeweils zwei weitere Vektoren an, die

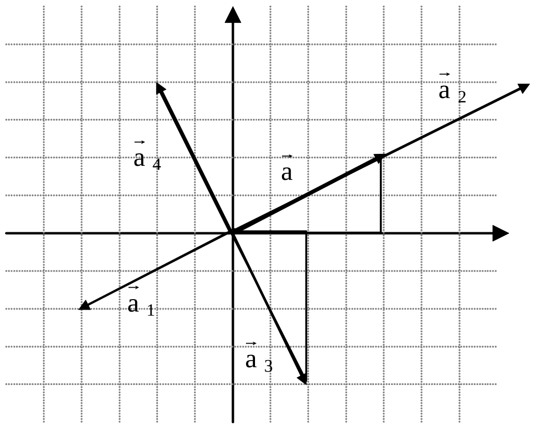
a) parallel
b) orthogonal

zu $\vec{a}$ gerichtet sind.

Lösung:

Z. B. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Z. B. $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Parallele und orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ sind

- **parallel**, wenn $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ (Verschiebung in x- und y-Richtung im **gleichen** Verhältnis)
- **orthogonal**, wenn $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$ (Verschiebung in x- und y-Richtung im **entgegengesetzten** Verhältnis)

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 8

7.0.6. Parameterform der Geradengleichung in der Ebene

Beispiel:

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x}(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne die Ortsvektoren $\vec{x}(r)$ für $r \in \{-1; 0; 1; 2\}$ in ein Koordinatensystem
b) Formuliere die Geradengleichung in Koordinatenform g(x) = ax + b
c) Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden f an, die parallel zu g verläuft.
d) Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden h an, die orthogonal zu g verläuft.
e) Bestimme den Abstand des Punktes P(−1|−2) zur Geraden g.

Lösung:

a) $\vec{x}(-1) = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}(2) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

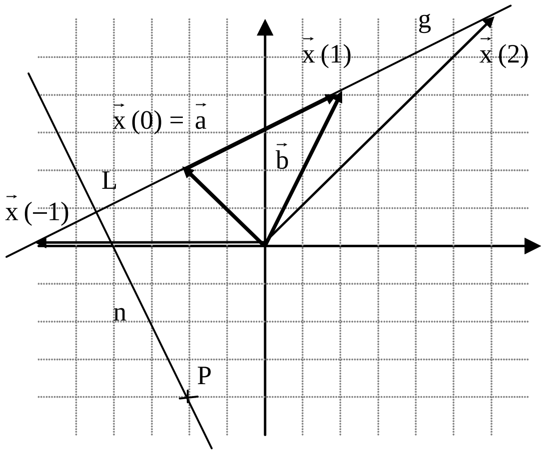
b) $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) Z.B. f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ bzw. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

d) Z.B. h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ bzw. $h(x) = -2x + 1$.

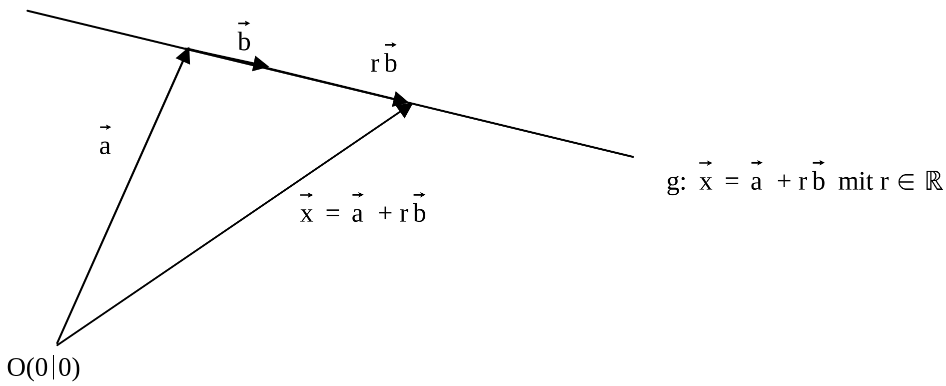
e) Lotgerade zu g durch P ist $n(x) = -2x - 4$

mit Lotfußpunkt $L(-\frac{11}{5} \mid \frac{2}{5}) \Leftrightarrow d = \overline{PL} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ LE



Parameterform der Geradengleichung in der Ebene

Eine Geradendarstellung in der Form g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$ heißt **Parameterform** der Geradengleichung mit dem **Stützvektor** $\vec{a}$, dem **Richtungsvektor** $\vec{b}$ und dem **Parameter** r.



Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene Nr. 9 und 10