

7.1. Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: Vektoren in der Ebene

- a) Zeichne die folgenden Vektoren als Ortsvektoren in eine passende Koordinatenebene (x_1 - x_2 -Ebene, x_1 - x_3 -Ebene oder x_2 - x_3 -Ebene) des kartesischen Koordinatensystems.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_7$ und \vec{a}_8 an, die die Figur aus a) zu einem **Quadrat** vervollständigen.
 c) Berechne die **Länge** der Vektoren $\vec{a}_1 - \vec{a}_8$.
 d) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_1', \vec{a}_3', \vec{a}_5'$ und \vec{a}_7' an, die auf dem **Umkreis** des Quadrates aus b) liegen.
 e) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_2'', \vec{a}_4''; \vec{a}_6''$ und \vec{a}_8'' an, die auf dem **Inkreis** des Quadrates aus b) liegen
 f) Gib acht Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_8$ an, die auf einem entsprechenden Kreis in der x_1 - x_3 -Ebene liegen.

Aufgabe 2: Vektoren im Raum

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zeichne die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabe 3: Vektoren im Raum

- a) Zeichne die folgenden Vektoren als Ortsvektoren in ein kartesisches Koordinatensystem:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_7$ und \vec{a}_8 an, die die Figur aus a) zu einem **Rechteck** vervollständigen.
 c) Berechne die **Länge** der Vektoren $\vec{a}_1 - \vec{a}_8$.
 d) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_1', \vec{a}_3', \vec{a}_5'$ und \vec{a}_7' an, die auf dem **Umkreis** des Rechteckes aus b) liegen.
 e) Gib sechs geeignete Vektoren $\vec{a}_2'', \vec{a}_3'', \vec{a}_4''; \vec{a}_6'', \vec{a}_7''$ und \vec{a}_8'' an, die auf dem **Inkreis** des Rechteckes aus b) liegen
 f) Gib acht Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_8$ an, die ein Rechteck beschreiben, das **senkrecht** auf dem Rechteck aus a) steht. Wähle dabei $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$. Wie viele Lösungen gibt es noch?

Aufgabe 4: Spiegelungen in der Ebene

Gegeben sind die Punkte A(1|2|0), B(2|-1|0) und C(3|1|0)

- a) Zeichne das Viereck OABC in ein Koordinatensystem.
 b) Begründe anhand der Ortsvektoren \vec{OA}, \vec{OB} und \vec{OC} , dass das Viereck ein Parallelogramm sein muss.
 c) Begründe anhand der Ortsvektoren \vec{OA} und \vec{OB} , dass das Viereck rechtwinklig sein muss.
 d) Spiegele die Figur OABC an der x_1 - x_3 -Ebene und gib die Koordinaten der entsprechenden Punkte A', B' und C' an
 e) Spiegele die Figur O'A'B'C' an der x_2 - x_3 -Ebene und gib die Koordinaten der entsprechenden Vektoren A'', B'' und C'' an.
 f) Welche geometrische Abbildung führt direkt von der Figur OABC zu Figur O''A''B''C''?

Aufgabe 5: Spiegelungen im Raum

Gegeben ist der Vektor \vec{a} . Gib die Koordinaten der Vektoren \vec{a}_{12} , \vec{a}_{23} , \vec{a}_{13} und \vec{a}_0 an, die man durch Spiegelung von \vec{a} an der x_1 - x_2 -, x_2 - x_3 - und x_1 - x_3 -Ebene und am Koordinatenursprung erhält.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \text{ mit } a_1, a_2 \text{ und } a_3 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6: Linearkombinationen

Bestimme alle möglichen Faktoren, r , s und $t \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind und zeichne die Vektoren in ein Koordinatensystem.

$$\text{a) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Untersuche die folgenden Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} auf lineare Unabhängigkeit. Bestimme gegebenenfalls alle Zahlen $u \in \mathbb{R}$, für die dies der Fall ist. Drücke im Fall der linearen Abhängigkeit den Vektor \vec{c} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5u \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_u = \begin{pmatrix} 8 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: Vektoren in der Ebene

a) Zeichnung siehe rechts

$$b) \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}_1, \vec{a}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}_2,$$

$$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}_3, \vec{a}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}_4$$

$$c) |\vec{a}_1| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_5| = |\vec{a}_7| = 1 \text{ LE}$$

$$|\vec{a}_2| = |\vec{a}_4| = |\vec{a}_6| = |\vec{a}_8| = \sqrt{2} \text{ LE}$$

$$d) \vec{a}_1' = \sqrt{2} \vec{a}_1, \vec{a}_3' = \sqrt{2} \vec{a}_3,$$

$$\vec{a}_5' = \sqrt{2} \vec{a}_5, \text{ und } \vec{a}_7' = \sqrt{2} \vec{a}_7.$$

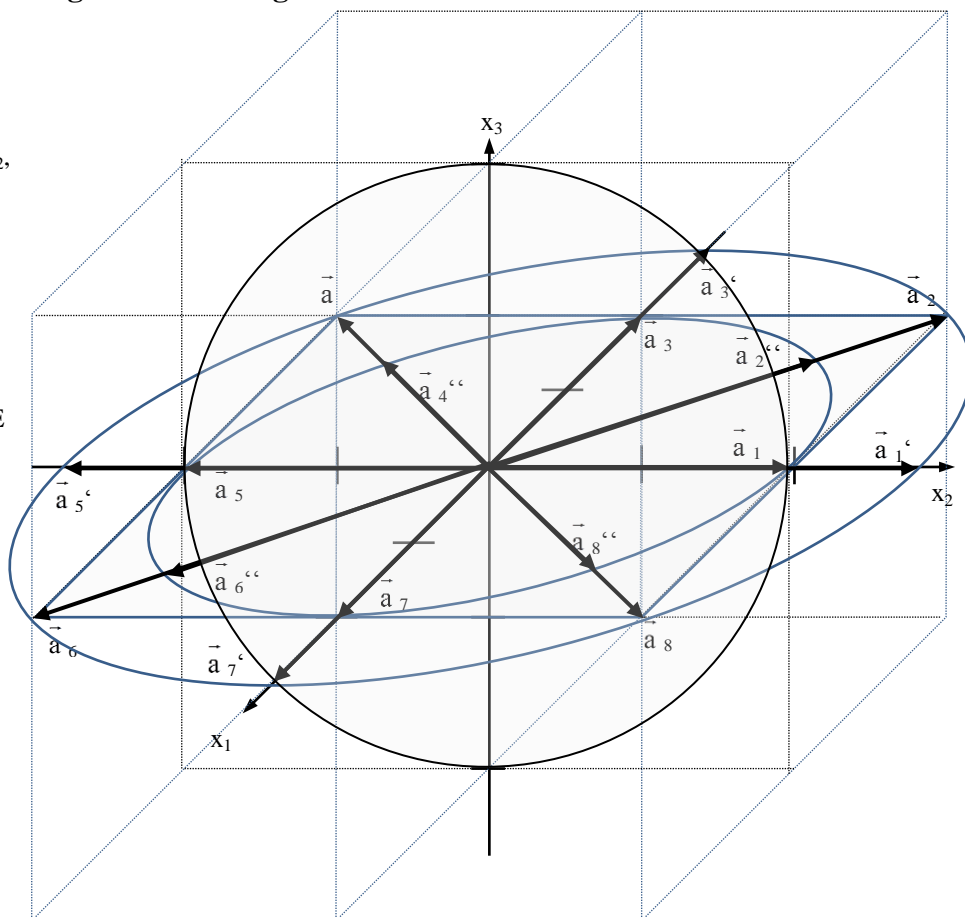
$$e) \vec{a}_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}_2, \vec{a}_4'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}_4,$$

$$\vec{a}_6'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}_6, \text{ und } \vec{a}_8'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}_8.$$

$$f) \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{b}_5 = -\vec{b}_1, \vec{b}_6 = -\vec{b}_2, \vec{b}_7 = -\vec{b}_3, \text{ und } \vec{b}_8 = -\vec{b}_4.$ Der Übersichtlichkeit halber ist nur der Kreis gezeichnet.



Aufgabe 2: Vektoren im Raum

vgl. Skript

Aufgabe 3: Vektoren im Raum

a) Zeichnung: siehe rechts

$$b) \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{a}_1, \vec{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{a}_2,$$

$$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{a}_3, \vec{a}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{a}_4$$

$$c) |\vec{a}_1| = |\vec{a}_5| = 1 \text{ LE},$$

$$|\vec{a}_2| = |\vec{a}_4| = |\vec{a}_6| = |\vec{a}_8| = \sqrt{3} \text{ LE}$$

$$|\vec{a}_3| = |\vec{a}_7| = \sqrt{2} \text{ LE}$$

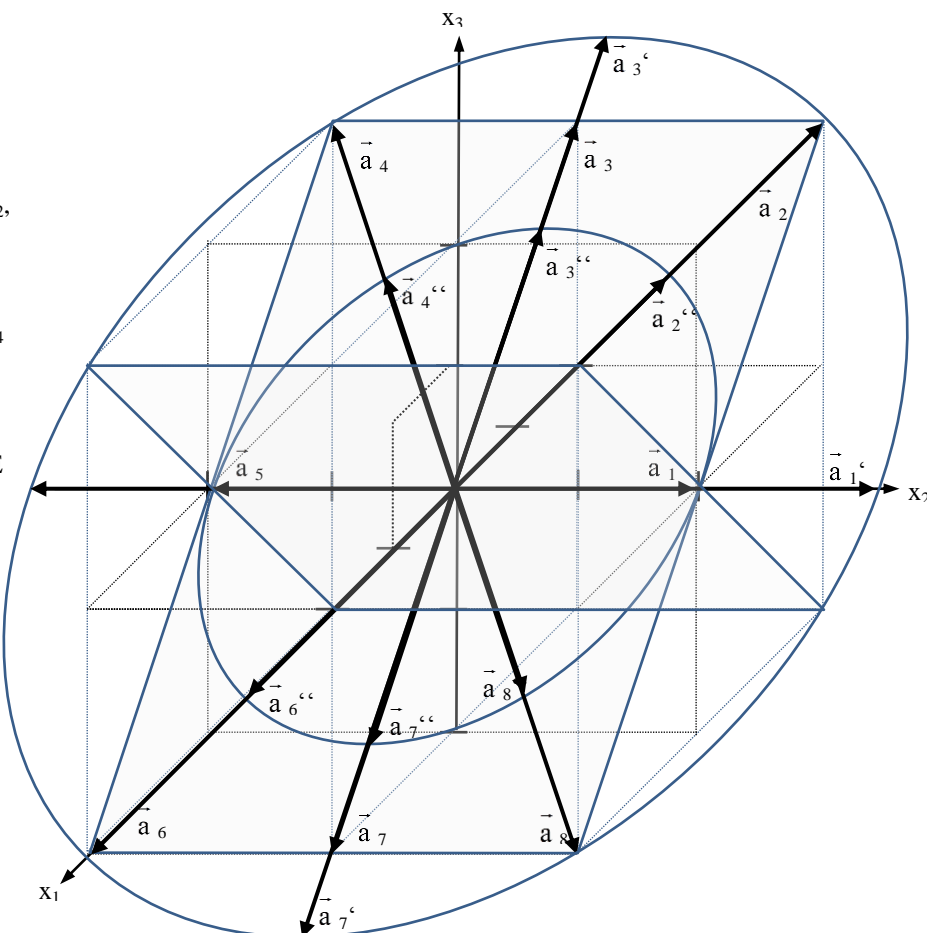
$$d) \vec{a}_1' = \sqrt{3} \vec{a}_1, \vec{a}_3' = \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{a}_3,$$

$$\vec{a}_5' = \sqrt{3} \vec{a}_5, \text{ und } \vec{a}_7' = \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{a}_7.$$

$$e) \vec{a}_2'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{a}_2, \vec{a}_3'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{a}_3,$$

$$\vec{a}_4'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{a}_4, \vec{a}_6'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{a}_6,$$

$$\vec{a}_7'' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vec{a}_7 \text{ und } \vec{a}_8'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{a}_8.$$



f) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_5 = -\vec{b}_1$, $\vec{b}_6 = -\vec{b}_2$, $\vec{b}_7 = -\vec{b}_3$, und $\vec{b}_8 = -\vec{b}_4$. Der Übersichtlichkeit

halber ist wieder nur das Rechteck gezeichnet. Man könnte auch z.B. bei \vec{a}_3 beginnen und ein Rechteck in der x_1 - x_3 -Ebene beschreiben, das senkrecht zu den beiden anderen Rechtecken steht.

Aufgabe 4: Spiegelungen in der Ebene

a) Die Zeichnung ergibt ein Rechteck

b) $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander, da ihre Komponenten im entgegengesetzten Verhältnis zueinander stehen.

c) $\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OC}$

d) $A'(1|-2|0)$, $B'(2|1|0)$ und $C'(3|-1|0)$

e) $A''(-1|2|0)$, $B''(-2|-1|0)$ und $C''(-3|1|0)$

f) Punktspiegelung am Ursprung

Aufgabe 5: Spiegelungen im Raum

$\vec{a}_{12} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{23} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{13} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_0 = -\vec{a}$.

Aufgabe 6: Linearkombinationen

a) $L = \{-2\}$ (\vec{a} und \vec{b} liegen auf einer Geraden)

b) $L = \{\}$ (\vec{a} und \vec{b} liegen nicht auf einer Geraden)

c) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$ (\vec{a} , \vec{b} und \vec{c} liegen auf einer Geraden)

d) $L = \{\}$ (\vec{a} und \vec{b} liegen auf einer Geraden, die \vec{c} nicht enthält)

e) $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (\vec{a} und \vec{b} liegen nicht auf einer Geraden aber in einer Ebene, die \vec{c} enthält)

f) $L = \{\}$ (\vec{a} und \vec{b} liegen auf einer Ebene, die \vec{c} nicht enthält)

g) $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (\vec{a} , \vec{b} und \vec{c} liegen nicht in einer Ebene)

h) $L = \{\}$ (\vec{a} , \vec{b} und \vec{c} liegen in einer Ebene, die \vec{d} nicht enthält)

Aufgabe 7: Lineare Unabhängigkeit

a) $0 = -3t\vec{a} - 7t\vec{b} + t\vec{c}$ und $\vec{c} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$

b) $0 = -3t\vec{a} + 2t\vec{b} + t\vec{c}$ und $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) Ansatz $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & | & 0 \\ 3 & 2 & u & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & | & 0 \\ 0 & 1 & 15 & | & 0 \\ 0 & 0 & u-9 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 = 7t\vec{a} - 15t\vec{b} + t\vec{c}_9$ und $\vec{c}_9 = -7\vec{a} + 15\vec{b}$ für $u =$

9 sowie lineare Unabhängigkeit für $u \neq 9$

d) Ansatz $r\vec{a} + s\vec{b}_u + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & u & | & 0 \\ 1 & u & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & u-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & u^2-u+2 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ lineare Unabhängigkeit für alle $u \in \mathbb{R}$

e) Ansatz $r\vec{a}_u + s\vec{b}_u + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2u & 2u & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0,5u & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0,5u & | & 0 \\ 0 & 0 & u^2-2u+1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 = 3t\vec{a}_1 - 2t\vec{b}_1 + t\vec{c}_1$ und $\vec{c}_1 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{b}_1$ für $u = 1$ sowie lineare Unabhängigkeit für $u \neq 1$