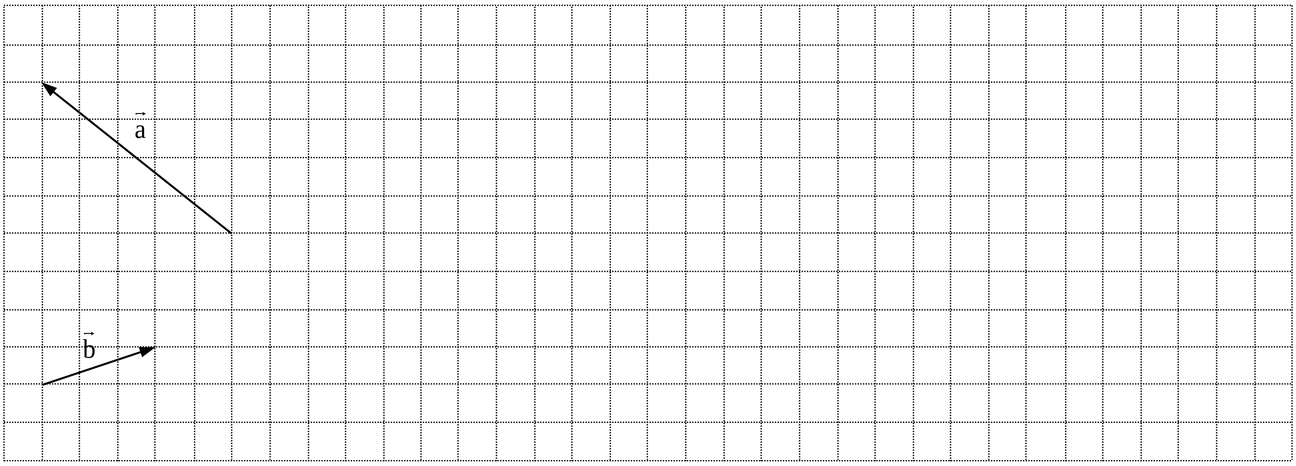
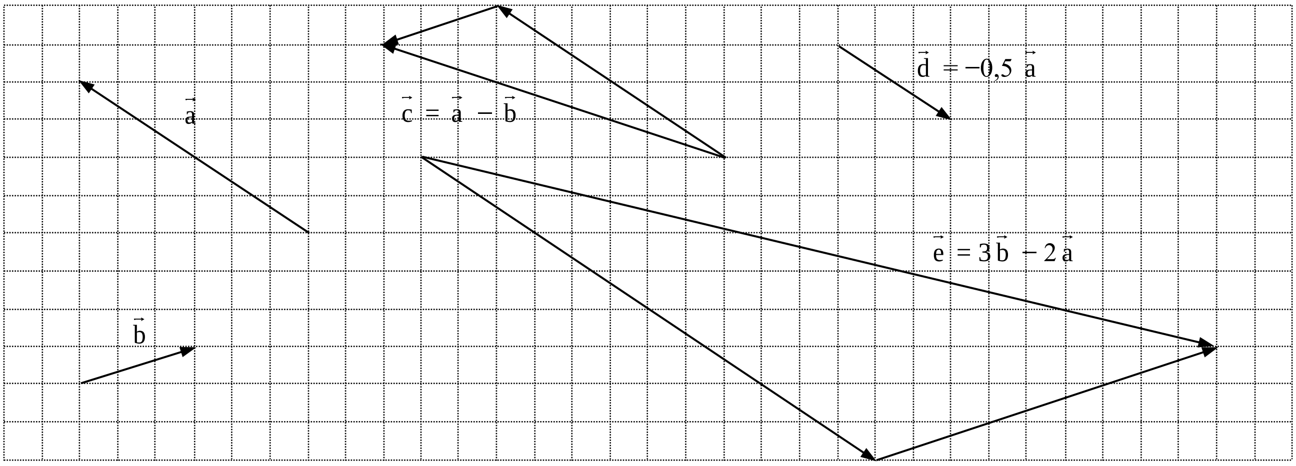
7.1. Prüfungsaufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1a: Vektoren in der Ebene (4)

Zeichne neben die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = -0{,}5\,\vec{a}$ und $\vec{e} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$:

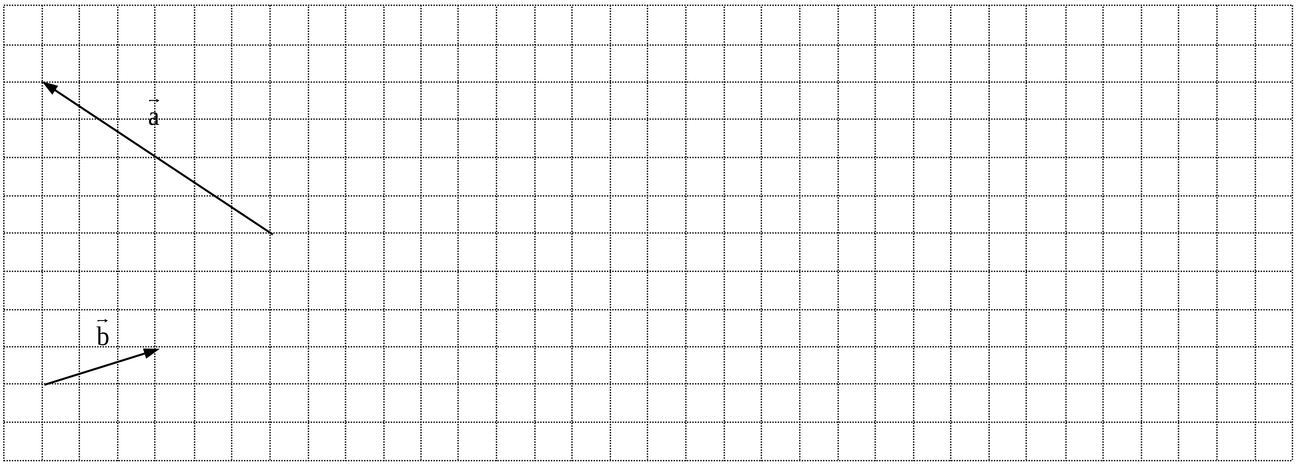


Lösung

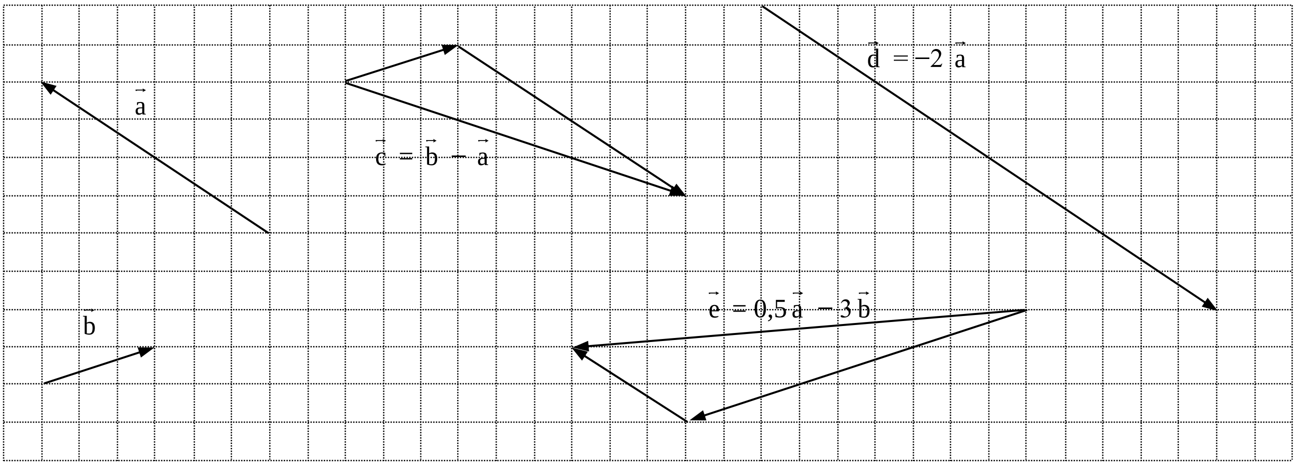


Aufgabe 1b: Vektoren in der Ebene (4)

Zeichne neben die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{d} = -2\,\vec{a}$ und $\vec{e} = 0{,}5\vec{a} - 3\vec{b}$:



Lösung



Aufgabe 2: Vektoren im Anschauungsraum (14)

Ein Kreis mit dem Radius r = 2 und Zentrum O(0|0|0) steht senkrecht auf der **Drehachse** $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Ein Quadrat mit dem Eckpunkt $A_1(2|0|0)$ liegt auf dem Kreis. Bestimme die drei anderen Eckpunkte des Quadrates. (3)

b) Bestimme die Koordinaten des Punktes B_1, der in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vom Ursprung aus auf dem Kreis liegt. (2)

c) Bestimme die vier Vektoren, die **in positiver Drehrichtung** auf den Seiten des Quadrates liegen. (4)

d) Bestimme die Länge der vier Seitenvektoren aus b). (2)

e) Zeichne den Kreis und das Quadrat in ein dreidimensionales Koordinatensystem mit 1 LE = 2 cm = 4 Häuschen. (3)

Lösung

a) $A_2(0|\sqrt{2}|-\sqrt{2})$, (1)
$A_3(-2|0|0)$ und (1)
$A_4(0|-\sqrt{2}|\sqrt{2})$ (1)

b) Aus $\overline{OB_1} = 2$ folgt

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ bzw.} \qquad (1)$$

$B_1(\frac{2}{\sqrt{3}}|\frac{2}{\sqrt{3}}|-\frac{2}{\sqrt{3}})$ (1)

c) $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, (1)

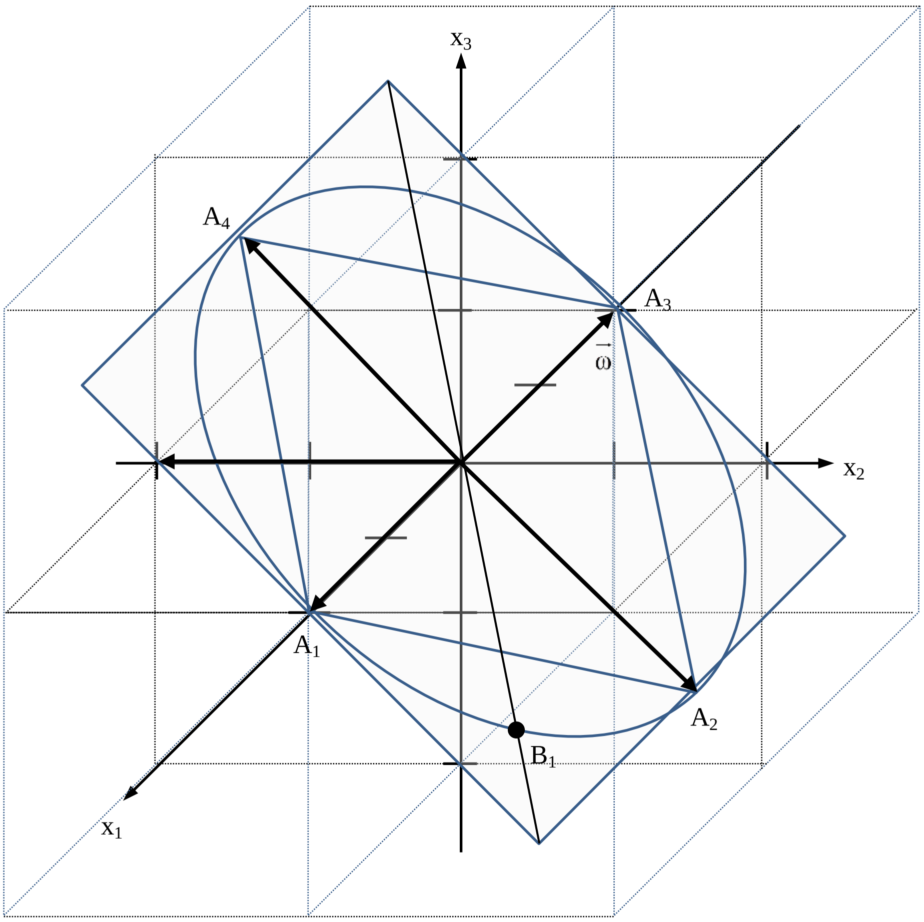
$\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ (1)

$\overrightarrow{A_3A_4} = -\overrightarrow{A_1A_2}$ (1)

$\overrightarrow{A_4A_1} = -\overrightarrow{A_2A_3}$. (1)

d) $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_1} = 2\sqrt{2}$ (2)

e) Skizze (3)



Aufgabe 3a: Spiegelung (4)

a) Gegeben sind die Punkte A(1|0|−1), B(1|1|−2) und C(0|2|−2). Bestimme die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. (2)

b) Bestimme die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D', die durch Spiegelung von ABCD an der x_1-x_3-Ebene entstehen. (2)

Lösung

a) D(0|3|−3) oder D(2|−1|−1) oder D(0|1|−1) (2)

b) A'(1|0|−1), B'(1|−1|−2), C'(0|−2|−2) und D'(0|−3|−3) oder D'(2|1|−1) oder D'(0|−1|−1) (2)

Aufgabe 3b: Spiegelung (4)

a) Gegeben sind die Punkte A(2|0|−2), B(2|2|−4) und C(0|4|−4). Bestimme die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. (2)

b) Bestimme die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D', die durch Spiegelung von ABCD an der x_1-x_2-Ebene entstehen. (2)

Lösung

a) D(0|6|−6) oder D(4|−2|−2) oder D(0|2|−2) (2)

b) A'(2|0|2), B'(2|2|4), C'(0|4|4) und D'(0|6|6) oder D'(4|−2|2) oder D'(0|2|2) (2)

Aufgabe 4a: Betrag (6)
Untersuche, ob das Dreieck ABC mit A(2|2|−3), B(−2|−6|1) und C(1|−1|2) gleichschenklig oder gleichseitig ist. Bestimme seinen Umfang und seinen Flächeninhalt.

Lösung:

$\overline{AB} = 4\sqrt{6}$ LE und $\overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{35}$ LE ⇒ ABC ist gleichschenklig aber nicht gleichseitig. (2)

Der Umfang ist $u = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{35}$ LE ≈ 21,63 FE. (1)

Der Mittelpunkt der Basis AB ist M(0|−2|−1) und die Höhe ist $\overline{MC} = \sqrt{11}$ LE. (2)

Der Flächeninhalt ergibt sich damit zu $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MC} = 2\sqrt{66}$ FE ≈ 16,25 FE (1)

Aufgabe 6a: Skalarprodukt (8)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{12}\\ \sqrt{5}\end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Vektor $\vec{b}$ mit der Länge $\sqrt{5}$, der im Winkel 30° zu $\vec{a}$ geneigt ist und in der x-y-Ebene liegt. (4)

b) Bestimme den Vektor $\vec{c}$ mit der Länge $2\sqrt{5}$, der sowohl senkrecht zu $\vec{a}$ als auch senkrecht zu $\vec{b}$ steht. (2)

c) Berechne das Volumen der von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Pyramide. (2)

Lösungen:

a) Für $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{pmatrix}$ muss gelten: $b_z = 0$; $b_x^2 + b_y^2 = 5$ und $\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*|\vec{b}|} = \cos(30°) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot b_x + \sqrt{12}\cdot b_y}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (2)

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,b_x + \sqrt{12}\,b_y = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow b_x + 2b_y = 5.$ (1)

Einsetzen ergibt $(5 - 2b_y)^2 + b_y^2 = 5 \Leftrightarrow 5b_y^2 - 20b_y + 20 = 0 \Rightarrow b_y = 2$ und $b_x = 1 \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ (1)

b) $\vec{c} = 2\sqrt{5}\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = 2\sqrt{5}\cdot\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{12}\\ \sqrt{5}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}-2\sqrt{5}\\ \sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ oder mit Skalarprodukt (2)

c) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(30°) \cdot |\vec{c}| = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}$ VE (2)

Aufgabe 6b: Skalarprodukt (8)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die zwei Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ mit der Länge $\sqrt{5}$, die im Winkel 60° zu $\vec{a}$ geneigt sind und in der y-z-Ebene liegen. (4)

b) Welchen Körper erhält man, wenn man **alle** Vektoren betrachtet, die im Winkel von 60° zu $\vec{a}$ geneigt sind? (1)

c) Welche Lage muss $\vec{a}$ zur y-z-Ebene haben, damit es in Teil a) nur **eine** Lösung gibt? (1)

d) Berechne den Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}_1$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{b}_2$ aufgespannten Dreiecke. (2)

Lösungen:

a) Für $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ muss gelten: $b_y = 0$; $b_x^2 + b_z^2 = 5$ und $\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \cos(60°) \Leftrightarrow \frac{b_x - 3b_z}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b_x - 3b_z = 5$ (2)

Einsetzen ergibt $(5 + 3b_z)^2 + b_z^2 = 5 \Leftrightarrow 10b_z^2 + 30b_z + 20 = 0 \Leftrightarrow (b_z + 1)(b_z + 2) = 0$ (1)

$\Rightarrow \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1)

b) Sie bilden einen **Kegel.** (1)

c) Wenn $\vec{a}$ selbst schon den Winkel 60° zur x-z-Ebene bildet, **berührt** der Kegel die Ebene. (1)

d) $A_1 = \frac{1}{2} g_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_1| \cdot \sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ FE $= A_2$ (2)

Aufgabe 7a: Lineare Unabhängigkeit (4)

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Lösung:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig. (4)

Aufgabe 7b: Lineare Unabhängigkeit (4)

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Lösung:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig. (4)