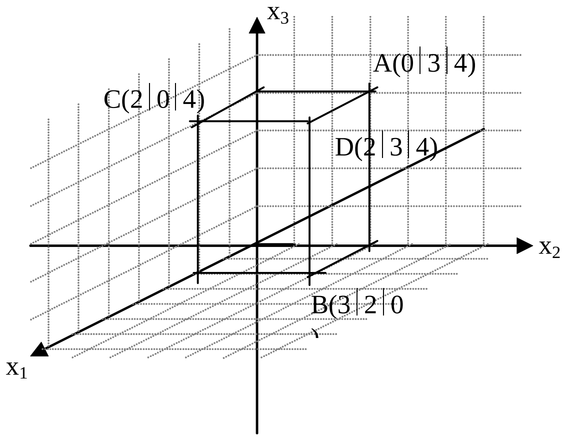
7.1. Vektoren

Vektoren mit drei Komponenten lassen sich geometrisch als **Verschiebungen** im Raum interpretieren. Die durch Vektoren dargestellten **Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen** erhalten dann eine anschauliche Deutung als **Punkte, Geraden und Ebenen** im dreidimensionalen Raum. Umgekehrt lassen sich dann auch mit Hilfe der LGS **gemeinsame Punkte, Abstände und Winkel** zwischen Geraden und Ebenen berechnen.

7.1.1. Das kartesische Koordinatensystem

Da es im dreidimensionalen Raum viel mehr mögliche Perspektiven gibt als in der Ebene, legt man nur die gegenseitige **Orientierung** der Achsen fest und wählt dann eine geeignete Blickrichtung auf das Koordinatensystem. Die Orientierung der Achsen im **rechtssinnigen** Koordinatensystem läßt sich aus der **rechten Hand** ableiten: Daumen = x_1-Achse, Zeigefinger = x_2-Achse und Mittelfinger = x_3-Achse. Die **Blickrichtung** wählt man in der Regel so, das die x_1-x_2-Ebene oder die x_1-x_3-Ebene in der Papierebene liegt.
Zur Darstellung des räumlichen Koordinatensystems im Heft wählt man in der Regel eine **Parallelprojektion** mit $\alpha = 45°$ und $k = \frac{1}{2}$. Auf kariertem Papier würde sich auch $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ anbieten, allerdings wirken diese Darstellungen immer etwas verzerrt!



Übungen: Aufgaben zur Vektoren Nr. 1

7.1.2. Geometrische Deutung von Vektoren im dreidimensionalen Raum

Geometrische Deutung von Vektoren für n = 3 Komponenten:

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wird als **Verschiebung** um a_1 in x_1-Richtung, a_2 in x_2-Richtung und a_3 in x_3-Richtung aufgefasst. Der **Ausgangspunkt** dieser Verschiebung ist dabei nicht festgelegt. Liegt der Ausgangspunkt im Koordinatenursprung O(0|0|0), so heißt a **Ortsvektor** und endet im Punkt $P(a_1|a_2|a_3)$: $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$.

Geometrische Deutung der Vektorrechnung für n = 3:

Die **Summe** $\vec{a} + \vec{b}$ erhält man durch Hintereinanderausführen (**Hintereinanderlegen**) der beiden Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das **Produkt** $r\cdot\vec{a}$ erhält man durch **Streckung** bzw. Stauchung der Verschiebung $\vec{a}$ um den Faktor r. Für r < 0 dreht sich die Verschiebungsrichtung um.

Die **Differenz** zweier Vektoren $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ erhält man, indem man b **umdreht** und dann zu $\vec{a}$ addiert. Zeichnet man $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Ortsvektoren, so ist $\vec{a} - \vec{b}$ die Verschiebung, die vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ führt.

Ausdrücke der Gestalt $r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} + ...$ heißen **Linearkombinationen**, da sie keine Potenzen enthalten und Multiplikation und Addition miteinander kombinieren. Anschaulich handelt es sich dabei um **Ketten** von hintereinander gelegten und passend gestreckten oder gestauchten Vektoren.

Übungen: Aufgaben zur Vektoren Nr. 2 - 5

7.1.3. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Einführung: Aufgaben zu Vektoren Nr. 6

Definition
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen **kollinear,** wenn einer von ihnen als **Vielfaches** des anderen darstellbar ist, d.h., wenn die entsprechenden Ortsvektoren auf einer **Geraden** liegen.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen **koplanar**, wenn einer von ihnen als **Linearkombination** der beiden anderen darstellbar ist, d.h., wenn die entsprechenden Ortsvektoren auf einer **Ebene** liegen.

Definition
n Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn der **Nullvektor als nichttriviale Linearkombination** dieser Vektoren darstellbar ist, d.h., wenn das **homogene Gleichungssystem** $r_1\vec{a}_1 + ... + r_n\vec{a}_n = \vec{0}$ **nichttriviale Lösungen** $r_1, ..., r_n$ besitzt, d.h., wenn **dim L_{hom} = n − Rg($\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$) > 0**. Vektoren, die nicht linear unabhängig sind, heißen **linear unabhängig**

Satz:
Für **dreidimensionale** Vektoren gilt:
1 Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist **immer linear unabhängig**:
Beweis: Das LGS : $r\vec{a} = \vec{0}$ hat für $\vec{a} \neq \vec{0}$ nur die triviale Lösung r = 0.
2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **linear abhängig**, wenn sie **kollinear** sind:
Beweis $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ mit $r \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{s}{r}\vec{b}$
3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear abhängig**, wenn sie **koplanar** sind:
Beweis $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$ mit $r \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{s}{r}\vec{b} - \frac{t}{r}\vec{c}$
4 und mehr Vektoren sind **immer linear abhängig**:
Beweis Das LGS $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d} = \vec{0}$ hat wegen n > Rg($\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{d}$) immer unendlich viele Lösungen.

Übung: Formuliere entsprechende Kriterien für linear Abhängigkeit für **zweidimensionale** Vektoren.

Übungen: Aufgaben zu Vektoren Nr. 7