7.2. Aufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: Ursprungsgerade in Parameterform

Gegeben sind die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Faktor $r \in \mathbb{R}$, für den die Gleichung $\vec{x} = r\vec{b}$ erfüllt ist

b) Erkläre **geometrisch** mit Hilfe einer **Zeichnung** und **rechnerisch** mit Hilfe eines **LGS**, warum die Gleichung $\vec{y} = r\vec{b}$ keine Lösung haben kann.

c) Welche geometrischen Eigenschaft eines Vektors lässt sich aus dem **Verhältnis der Komponenten** zueinander ablesen? Welche Eigenschaft des Vektors wird durch die **Beträge der Komponenten** festgelegt?

d) Formuliere eine Gleichung für **alle** Ortsvektoren $\vec{x}$, deren Endpunkte auf der Geraden g liegen, die durch den Ursprung in Richtung des Vektors $\vec{b}$ verläuft.

Aufgabe 2: Verschobene Gerade in Parameterform

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimme den Faktor $r \in \mathbb{R}$, für den die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ erfüllt ist

b) Erkläre **geometrisch** mit Hilfe einer **Zeichnung** und **rechnerisch** mit Hilfe eines **LGS**, warum die Gleichung $\vec{y} = \vec{a} + r\vec{b}$ keine Lösung haben kann.

c) Formuliere eine Gleichung für **alle** Ortsvektoren $\vec{x}$, deren Endpunkte auf der Geraden g liegen, die durch den Endpunkt des Stützvektors $\vec{a}$ in Richtung des Vektors $\vec{b}$ verläuft.

Aufgabe 3: Punkt und Gerade, Ersetzen von Stütz- und Richtungsvektoren
Überprüfe, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g liegen. Gib eine alternative Gleichung für g mit geeignet gewählten neuen Richtungsvektoren an.

a) $P(-1|1|1)$, $Q(-1|4|3)$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(2|0|-1)$, $Q(-1|2|0)$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen
Gib die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen an.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Gerade mit vorgegebener Richtung durch einen Punkt
Gib eine Gleichung für die Gerade g an, die parallel zur Geraden h ist und durch den Punkt P geht.

a) P(1|0|1) und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) P(−5|6|7) und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 54 \\ 76 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) P(2|1|0) und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) P(1|0|0) und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Gerade durch zwei Punkte
Gib eine Gleichung für die Gerade g an, die durch die Punkte P und Q geht:

a) P(−1|1|1), Q(1|4|3)
b) P(1|0|0), Q(0|1|0)
c) P(−1|5|0), Q(2|0|−1)

Aufgabe 7: Lage zweier Geraden zueinander
Überprüfe, ob die beiden Geraden g und h gemeinsame Punkte haben und ob sie parallel zueinander sind. Bestimme außerdem die Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen und skizziere die beiden Geraden.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

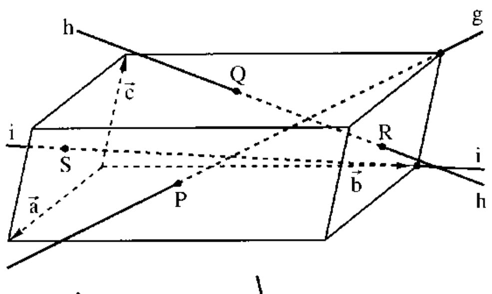
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

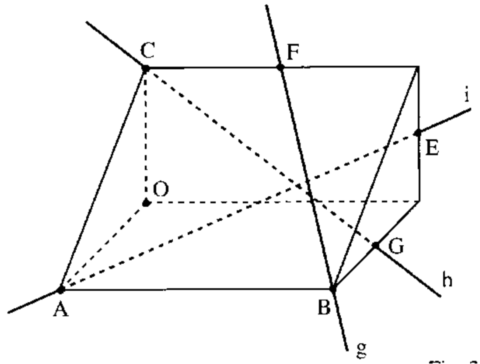
Aufgabe 8: Schnittpunkte von Geraden in der Ebene
Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Untersuchen Sie die Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$, h: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$ und i: $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b})$ auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.

Aufgabe 9: Schnittpunkte von Geraden im Raum
Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Untersuchen Sie die Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, h: $\vec{x} = \vec{b} + t(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})$ und i: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{c} + t(\vec{b} + \vec{c})$ auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.

Aufgabe 10: Schnittpunkte von Geraden im Spat
Die Punkte P, Q, R und S sind Mittelpunkte der Seitenflächen in dem rechts abgebildeten Spat. Untersuchen Sie die Geraden g, h und i auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.



Aufgabe 11: Schnittpunkte von Geraden im Prisma
Die Punkte E, F und G sind Kantenmitten in dem rechts abgebildeten Prisma. Untersuchen Sie die Geraden g, h und i auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.



7.2. Lösungen zu den Aufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: Ursprungsgerade in Parameterform

a) $r = -2$

b) **geometrisch**: $\vec{y}$ liegt nicht auf der Geraden, die durch alle Vielfachen von $\vec{b}$ gebildet wird.

rechnerisch: Die Gleichung $\vec{y} = r\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung

c) **Verhältnis der Komponenten = Richtung**
Beträge der Komponenten = Länge

d) g: $\vec{x} = r\vec{b}$

Aufgabe 2: Verschobene Gerade in Parameterform

a) $r = 3$

b) **geometrisch**: Die Endpunkte der Ortsvektoren $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ liegen auf einer Geraden g, die den Endpunkt von $\vec{y}$ nicht enthält.

rechnerisch: Die Gleichung $\vec{y} = \vec{a} + r\vec{b} \Leftrightarrow \vec{y} - \vec{a} = r\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung

c) g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3: Punkt und Gerade, Ersetzen von Stütz- und Richtungsvektoren

a) $P \notin g$, da die Gleichung $\overrightarrow{OP} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Lösung hat

$Q \in g$, da die Gleichung $\overrightarrow{OQ} = \vec{x}$ für $r = 2$ erfüllt ist.

$\overrightarrow{OQ}$ kann als neuer Stützvektor verwendet werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P \in g$, da die Gleichung $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ für $r = 1$ erfüllt ist.

$Q \notin g$, da die Gleichung $\overrightarrow{OQ} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ keine Lösung hat

$\overrightarrow{OP}$ kann als neuer Stützvektor verwendet werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen

a) $S_{12}(2|-1|0)$ für $r = -1$, $S_{13}(\frac{3}{2}|0|\frac{1}{2})$ für $r = -\frac{1}{2}$ und $S_{23}(0|3|2)$ für $r = 1$

b) $S_{12}(-\frac{1}{2}|-\frac{7}{2}|0)$ für $r = -\frac{3}{2}$, $S_{13}(3|0|7)$ für $r = 2$ und $S_{23}(0|-3|1)$ für $r = -1$

c) $S_{12}(0|1|0)$ für $r = 1$, $S_{13}(-\frac{1}{2}|0|\frac{1}{2})$ für $r = \frac{3}{2}$ und $S_{23}(0|1|0)$ für $r = 1$

d) S_{12} existiert nicht, $S_{13}(-5|0|5)$ für $r = -3$ und $S_{23}(0|5|5)$ für $r = 2$

Aufgabe 5: Gerade mit vorgegebener Richtung durch einen Punkt

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\6\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Gerade durch zwei Punkte

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-5\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7: Lage zweier Geraden zueinander

a) g mit $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h mit $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sind windschief

b) g mit $\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ und h mit $\begin{pmatrix}0\\6\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2,25\\-0,75\\0\end{pmatrix}$ haben den gemeinsamen Punkt S(1,5|1,5|3) mit r = s = 0,5

c) g mit $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h mit $\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2,5\\0\\1\end{pmatrix}$ sind parallel

d) g mit $\begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4,5\\5,5\\0\end{pmatrix}$ und h mit $\begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0,5\\0\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2,25\\5,5\\0\end{pmatrix}$ schneiden sich in S(0|1|9) mit r = 2 und s = 0

Aufgabe 8: Schnittpunkte von Geraden in der Ebene

g und h schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $-\vec{a} + 2\vec{b}$

g und i sind parallel zueinander

h und i schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $\frac{3}{2}\vec{b}$

Aufgabe 9: Schnittpunkte von Geraden im Raum

g und h schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$

g und i schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a} + \vec{b}$

h und i schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

Aufgabe 10: Schnittpunkte von Geraden im Spat

g: $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + r(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$

h: $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + s(\vec{b} - \vec{c})$

i: $\vec{x} = \vec{b} + t(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$

g und h schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$

i ist windschief zu g und zu h.

Aufgabe 11: Schnittpunkte von Geraden im Prisma

g: $\vec{x} = \vec{a} + r(4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c})$

h: $\vec{x} = \vec{b} + s(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$

i: $\vec{x} = \vec{c} + t(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$

g und i schneiden sich im Punkt mit dem Ortsvektor $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

h ist windschief zu g und zu i.