# 7.2. Prüfungsaufgaben zu Geraden

**Aufgabe 1: Parameterform der Geradengleichung (3)**
Geben Sie eine Parameterform für die Gerade g an, die

a) durch die Punkte P(1|2|3) und Q(2|1|3) läuft (2)

b) parallel zur Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch den Punkt P(1|2|3) läuft (1)

**Lösung**

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (1)

**Aufgabe 2: Parameterform der Geradengleichung (3)**
Geben Sie eine Parameterform für die Gerade g an, die

a) durch die Punkte P(3|2|1) und Q(1|2|3) läuft (2)

b) parallel zur Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch den Punkt P(3|2|1) läuft (1)

**Lösung**

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1)

**Aufgabe 3: Punktprobe (7)**
Eine gleichseitige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und eine Höhe von 5 LE. Die Grundfläche liegt so in der $x_1$-$x_2$-Ebene, dass eine Ecke im Ursprung O(0|0|0) und die andere im Punkt E(4|4|0) ist. Im Punkt P(3,6|−0,6|1) steht ein Scheinwerfer, der parallel zum Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ausgerichtet wird. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Pyramide mit dem Lichtstrahl. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Lichtstrahl die Pyramidenspitze Q trifft.

**Lösung:**

Lichtstrahl g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $S_{12}$(4,2|−1,2|0), $S_{23}$(0|3|7) und $S_{13}$(3|0|2) (3)

Zeichnung (2)

$\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 2{,}6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist für kein r erfüllt ⇒ P wird nicht getroffen. (2)

**Aufgabe 4: Punktprobe (7)**
Eine gleichseitige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und eine Höhe von 5 LE. Die Grundfläche liegt so in der $x_1$-$x_2$-Ebene, dass eine Ecke im Ursprung O(0|0|0) und die andere im Punkt E(4|−4|0) ist. Im Punkt P(3,6|0,6|1) steht ein Scheinwerfer, der parallel zum Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ausgerichtet wird. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Pyramide mit dem Lichtstrahl. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Lichtstrahl die Pyramidenspitze Q trifft.

**Lösung:**

Lichtstrahl g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $S_{12}(4,2 \mid 1,2 \mid 0)$, $S_{23}(0 \mid -3 \mid 7)$ und $S_{13}(3 \mid 0 \mid 2)$ (3)

Zeichnung (2)

$\begin{pmatrix} 3,6 \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,6 \\ -2,6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist für kein r erfüllt ⇒ P wird nicht getroffen. (2)

**Aufgabe 5:Schnittpunkte von Geraden in der Ebene**
Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Untersuchen Sie die Geraden g und h auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.

a) g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ und h: $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{b} - \vec{a})$
b) g: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - 0{,}5\vec{a})$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + t(2\vec{b} + \vec{a})$
c) g: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + t(2\vec{a} + \vec{b})$ und h: $\vec{x} = 2\vec{a} + t(2\vec{b} - \vec{a})$
d) g: $\vec{x} = \frac{3}{5}\vec{b} + \vec{a} + t(2\vec{a} - \vec{b})$ und h: $\vec{x} = -2\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$

**Lösung**
a) $\vec{a} + 2\vec{b}$
b) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$
c) $\frac{11}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$
d) $-\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{7}{5}\vec{b}$

**Aufgabe 6: Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen (5)**
Beschreibe Sie, welche unterschiedlichen Lagen zwei verschiedene Geraden g und h im Raum zueinander haben können. Erläutern Sie die einzelnen Fälle jeweils durch selbst gewählte Beispiele.

**Lösung**
siehe Heft

**Question 7a: flight paths (17)**
An aircraft starts at time t = 0 in $P_1(-400|200|0)$ and sets its course towards the point $Q_1(200|-100|200)$ with speed 35 m/s. A second aircraft is coming down from position $P_2(-600|-400|200)$ with velocity $\vec{v}_2 = 50\vec{i} + 30\vec{j} - 10\vec{k}$.

a) Give the velocity of the first aircraft and the time when it passes through $Q_1$. (2)
b) Give the speed of the second aircraft and the time when it touches the x-y-plane. (2)
c) Calculate the coordinates of the intersections of the two flightpaths with the other coordinate planes and draw their course into a coordinate system with scale 100 m ≙ 1 cm. (6)
d) Show that flight paths of the two aircraft do not cross. (3)
e) Show that their distance at time t is $d(t) = \sqrt{440000 - 70000t + 2825t^2}$. (2)
f) Determine their minimal distance. (2)

**Question 7a: flight paths (17)**

a) $a_1$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ with velocity $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{OQ_1} = \vec{x}(20) \Rightarrow$ after 20 seconds $a_1$ passes through $Q_1$. (2)

b) $a_2$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -600 \\ -400 \\ 200 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$ with speed $|\vec{v}_2| = \sqrt{50^2+30^2+10^2} = 10\sqrt{35}$ m/s and (1)

height $z_2(t) = 200 - 10t = 0$ for $t = 20$ (1)

c) $S_{1xz}(0|0|133,\bar{3}) = S_{1yz}$ with $t = \frac{40}{3}$ and $S_{1xy}(-400|200|0)$ with $t = 0$ (1)

$S_{2yz}(0|-40|320)$ with $t = 12$, $S_{2xz}(-533,\bar{3}|0|66,\bar{6})$ with $t = \frac{40}{3}$ and $S_{2xy}(400|200|0)$ with $t = 20$ (3)

Drawing (2)

d) $\begin{pmatrix} -400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -600 \\ -400 \\ 200 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 30 & -50 & -200 \\ -15 & -30 & -600 \\ 10 & 10 & 200 \end{array}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -20 \\ -3 & -6 & -120 \\ 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & -8 & -80 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 90 \end{array}\right) \Rightarrow$ no solution (2)

e) $d(t) = \sqrt{(200-20t)^2+(600-45t)^2+(-200+20t)^2}$

$= \sqrt{40000-8000t+400t^2+360000-54000t+2025t^2+40000-8000t+400t^2} = \sqrt{440000-70000t+2825t^2}$ (2)

f) $d'(t) = \frac{5650t-70000}{2\sqrt{440000-70000t+2825t^2}} = 0$ for $t \approx 12,4$ s with $d(12,4) \approx 158,0$ m (2)

**Aufgabe 7b: Flugbahnen (18)**

Ein Flugzeug startet zur Zeit t = 0 in $P_1(-400|150|0)$ mit Kurs in Richtung $Q_1(-100|0|100)$ und Geschwindigkeit 35 m/s. Zur gleichen Zeit befindet sich ein zweites Flugzeug mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$ in $P_2(-600|-450|200)$. Alle Angaben sind in Metern und Sekunden.

a) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor des ersten Flugzeuges. Wann passiert das erste Flugzeug den Punkt $Q_1$? (2)
b) Bestimme die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges und des Zeitpunkt seiner Landung auf der x-y-Ebene. (2)
c) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Flugbahnen mir den Koordinatenebenen und skizziere ihren Verlauf in ein Koordinatensystem mit dem Maßstab 100 m ≙ 1 cm. (7)
d) Zeige, dass sich die Flugbahnen nicht kreuzen. (3)
e) Bestimme den minimalen Abstand der beiden Flugzeuge. (4)

**Aufgabe 7b: Flugbahnen (18)**

a) $F_1$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -400 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_1} = \vec{x}(10) \Rightarrow F_1$ passiert $Q_1$ nach 10 s. (2)

b) $F_2$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -600 \\ -450 \\ 200 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$ mit Geschwindigkeit $|\vec{v}_2| = \sqrt{50^2+30^2+10^2} = 10\sqrt{35}$ m/s und (1)

Flughöhe $z_2(t) = 200 - 10t = 0$ für $t = 20$ s (1)

c) $S_{1yz}(0|-50|133,\bar{3})$ für $t = \frac{40}{3}$, $S_{1xz}(-100|0|100)$ für $t = 10$ und $S_{1yy}(-400|150|0)$ für $t = 0$ (2)

$S_{2yz}(0|-90|80)$ für $t = 12$, $S_{2xz}(150|0|-50)$ für $t = 15$ und $S_{2xy}(400|150|0)$ für $t = 20$ (3)

Beschriftete Zeichnung (2)

d) $\begin{pmatrix}-400\\150\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}30\\-15\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-600\\-450\\200\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}50\\30\\-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}30 & -50 & -200\\-15 & -30 & -600\\10 & 10 & 200\end{array}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\1 & 2 & 40\\1 & 1 & 20\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\0 & -8 & -140\\0 & -8 & -80\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\0 & 2 & 35\\0 & 0 & 60\end{array}\right) \Rightarrow$ keine Lösung (2)

e) $d(t) = \sqrt{(200-20t)^2+(600-45t)^2+(-200+20t)^2}$ (1)

$= \sqrt{40000-8000t+400t^2+360000-54000t+2025t^2+40000-8000t+400t^2} = \sqrt{440000-70000t+2025t^2}$ (1)

$\Rightarrow d'(t) = \dfrac{4050t-70000}{2\sqrt{440000-70000t+2025t^2}} = 0$ für $t \approx 17{,}3$ s mit $d(17{,}3\text{ s}) \approx 293{,}8$ m (2)

**Aufgabe 7c: Flugbahnen (18)**

Ein Flugzeug startet zur Zeit t = 0 in $P_1(-400|180|0)$ mit Kurs in Richtung $Q_1(-100|-270|100)$ und Geschwindigkeit 55 m/s.

Zur gleichen Zeit befindet sich ein zweites Flugzeug mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}50\\30\\-10\end{pmatrix}$ in $P_2(-600|-480|200)$.

Alle Angaben sind in Metern und Sekunden.

a) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor des ersten Flugzeuges und wann passiert das erste Flugzeug den Punkt $Q_1$? (2)

b) Bestimme die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges und des Zeitpunkt seiner Landung auf der x-y-Ebene. (2)

c) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Flugbahnen mir den Koordinatenebenen und skizziere ihren Verlauf in ein Koordinatensystem mit dem Maßstab 100 m ≙ 1 cm. (7)

d) Zeige, dass sich die Flugbahnen nicht kreuzen. (3)

e) Bestimme den minimalen Abstand der beiden Flugzeuge. (4)

**Aufgabe 7c: Flugbahnen (18)**

a) $F_1$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-400\\180\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}30\\-45\\10\end{pmatrix}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}30\\-45\\10\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_1} = \vec{x}(10) \Rightarrow F_1$ passiert $Q_1$ nach 10 s. (2)

b) $F_2$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-600\\-480\\200\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}50\\30\\-10\end{pmatrix}$ mit Geschwindigkeit $|\vec{v}_2| = \sqrt{50^2+30^2+10^2} = 10\sqrt{35}$ m/s und (1)

Flughöhe $z_2(t) = 200 - 10t = 0$ für t = 20 (1)

c) $S_{1yz}(0|-420|133,\overline{3})$ für $t = \dfrac{40}{3} = 16,\overline{6}$; $S_{1xz}(-280|0|40)$ für t = 4 und $S_{1yy}(-400|180|0)$ für t = 0 (2)

$S_{2yz}(0|-120|80)$ für t = 12, $S_{2xz}(200|0|40)$ für t = 16 und $S_{2xy}(400|120|0)$ für t = 20 (3)

Beschriftete Zeichnung (2)

d) $\begin{pmatrix}-400\\180\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}30\\-45\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-600\\-480\\200\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}50\\30\\-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}30 & -50 & -200\\-45 & -30 & -660\\10 & 10 & 200\end{array}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\3 & 2 & 44\\1 & 1 & 20\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\0 & -7 & -64\\0 & -8 & -80\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -5 & -20\\0 & 7 & 64\\0 & 0 & 6\end{array}\right) \Rightarrow$ keine Lösung (2)

e) $d(t) = \sqrt{(200-20t)^2+(660-75t)^2+(-200+20t)^2}$

$= \sqrt{40000-8000t+400t^2+435600-99000t+5625t^2+40000-8000t+400t^2} = \sqrt{515600-115000t+5625t^2}$ (1)

$\Rightarrow d'(t) = \dfrac{11250t-115000}{2\sqrt{515600-115000t+5625t^2}} = 0$ für $t = 10,\overline{2}$ s mit $d(10,\overline{2}\text{ s}) \approx 106{,}78$ m (2)