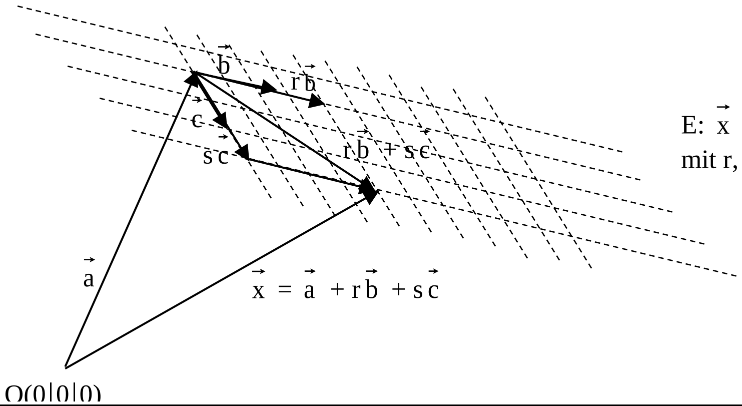
7.3. Ebenen

7.3.1. Parameterform der Ebenengleichung

Aufgaben zu Ebenen Nr. 1 und 2

Definition:

Eine Ebenendarstellung in der Form E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ mit r, s ∈ ℝ heißt **Parameterform** der Ebenengleichung mit dem **Stützvektor** $\vec{a}$ **,** den **Spannvektoren** $\vec{b}$ und $\vec{c}$, **die nicht zueinander parallel sein dürfen** (!) und den **Parametern** r und s.



Übungen: Aufgaben zur Ebenen Nr. 3 - 5

7.3.2. Ebenen zu vorgegeben Punkten und Richtungen

Aufgaben zu Ebenen Nr. 6

Satz Ebenen zu vorgegeben Punkten und Richtungen

Die Ebene, die parallel zu den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch den Punkt P geht, hat die Gleichung

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\vec{b} + s\vec{c}$.

Die Ebene, die parallel zu dem Vektor $\vec{c}$ durch die Punkte P und Q geht, hat die Gleichung

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\vec{c}$.

Die Ebene, die durch die Punkte P, Q und R geht, hat die Gleichung

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR}$.

Übungen: Aufgaben zu Ebenen Nr. 7 - 9

7.3.3. Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

Satz: **Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen**

Die gemeinsamen Punkte der Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ und der Ebene E: $\vec{x} = \vec{c} + s\vec{d} + t\vec{e}$ erhält man aus der Gleichung $\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d} + t\vec{e}$. g und E haben

- **keinen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung **keine** Lösung besitzt. Sie verlaufen dann **parallel** zueinander.
- einen **Schnittpunkt** P, wenn die Gleichung **eine** Lösung (r|s|t) besitzt. Seine Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen von r bzw. s und t in die Gleichung von g bzw. E.
- eine **gemeinsame Gerade** g ⊂ E, wenn die Gleichung **viele** Lösungen (r|s|t) besitzt. Die Gerade liegt dann **in** der Ebene.

Übungen: Aufgaben zu Ebenen Nr. 10

7.3.4. Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Satz: **Lagebeziehungen zwischen Ebenen**

Die gemeinsamen Punkte der Ebenen E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ und F: $\vec{x} = \vec{d} + t\vec{e} + u\vec{f}$ erhält man aus der Gleichung $\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} = \vec{d} + t\vec{e} + u\vec{f}$. E und F haben

- **keinen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung **keine** Lösung besitzt. Sie verlaufen dann **parallel** zueinander.
- **eine Schnittgerade** g, wenn die Gleichung Lösungen (r|s|t|u) besitzt, die von **einem** Parameter abhängen. Die Parameterform von g ergibt sich durch Einsetzen von r und s bzw. t und u in die Gleichung von E_1 bzw. E_2.
- **eine gemeinsame Ebene** E = F, wenn die Gleichung Lösungen (r|s|t|u) besitzt, die von **zwei** Parametern abhängen. Die Ebenen sind dann **identisch**.

Beispiel:

Bestimme die gemeinsamen Punkte von E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + r_1\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + s_1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Lösung

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & s_1 & r_2 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & s_1 & r_2 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1{,}5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 & 6{,}\overline{3} \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -1{,}\overline{3} \end{array}\right) \end{array} \text{ with GDC.}$$

Wähle den Parameter $s_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow r_2 = -1{,}\overline{3} + 0{,}5s_2$ und setze ein in E_2

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + (-1{,}\overline{3} + 0{,}5s_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 1{,}\overline{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s_2\cdot 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}-1{,}\overline{3}\\4\\-0{,}\overline{6}\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix} = \text{Schnittgerade } E_1 \cap E_2.$$

Übungen: Aufgaben zu Ebenen Nr. 11