7.4. Aufgaben zu Teilverhältnissen

Aufgabe 1: Schwerpunkte
T sei der Schwerpunkt des Waagebalkens mit den Endpunkten A und B und den dort aufgehängten Massen m_1 und m_2. Da T auf der Verbindungslinie AB liegt, gilt $\overrightarrow{AT} = t\cdot\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{TB} = s\cdot\overrightarrow{AB}$ mit geeigneten Faktoren t und s. Berechnen Sie t und s für die angegebenen Masse:

a) $m_1 = 2$ kg und $m_2 = 2$ kg   c) $m_1 = 2$ kg und $m_2 = 1$ kg   e) $m_1 = 4$ kg und $m_2 = 12$ kg
b) $m_1 = 1$ kg und $m_2 = 2$ kg   d) $m_1 = 15$ kg und $m_2 = 3$ kg   f) m_1 und m_2 beliebig

Aufgabe 2. Teilverhältnisse
Der Punkt T liegt auf der Geraden [AB]. Berechnen Sie alle möglichen Teilverhältnisse TV(ATB), TV(BAT), TV(TBA), TV(TAB), TV(BTA) und TV(ABT).

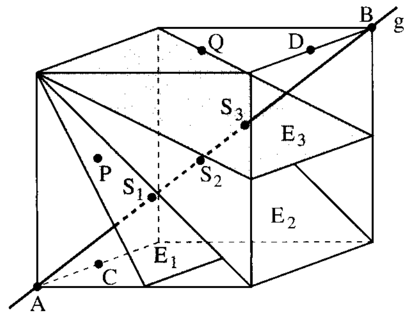
a) A(1|1|1), T(2|4|5) und B(5|13|17)   c) A(4|4|1), T(−2|−8|1) und B(3|2|1)
b) A(−1|0|2), T(7|10|−6) und B(3|5|−2)   d) A, T und B beliebige Punkt mit TV(ATB) = t

Aufgabe 3: Teilverhältnisse

a) Zeigen Sie, dass A(25|14|11) auf der Geraden durch P(1|−2|3) und Q(55|34|21) liegt.
b) Berechnen Sie TV(PAQ)
c) Zeigen Sie, dass der Punkt B mit TV(ABQ) = $\frac{1}{9}$ die Mitte der Strecke PQ ist.

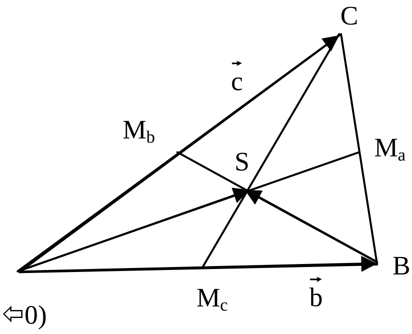
Aufgabe 4 (Teilverhältnisse
Zeigen Sie, dass für jeden Teilpunkt T einer Strecke AB die Beziehung TV(ATB)·TV(BTA) = 1 gilt)

Aufgabe 5: Teilverhältnisse im Würfel
Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 gehen durch Ecken bzw. Kantenmitten des nebenstehenden Würfels mit den Eckpunkten A(2|0|0) und B(0|2|2). Die Punkte C und D sind Kantenmitten. Die Punkte P und Q sind die Mitten der linken bzw. oberen Seitenfläche. Die Strecken AB, CD und PQ schneiden die Ebenen E_1, E_2 und E_3. In welchen Verhältnissen werden diese Strecken von den jeweiligen Schnittpunkten geteilt?



Aufgabe 6: Schwerpunkt eines Dreieckes
Gegeben ist das nebenstehende Dreieck ABC. Zeigen Sie:

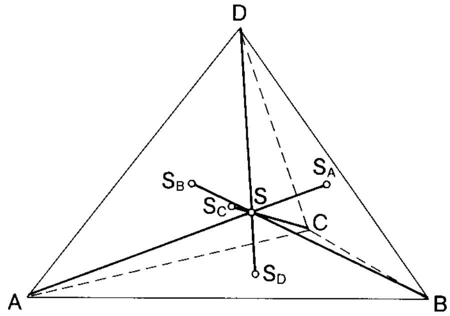
a) Die Seitenhalbierenden $[AM_a]$ und $[BM_b]$ schneiden sich in einem Punkt S mit $TV(ASM_A) = TV(BSM_B) = 2$
b) Die Seitenhalbierende CM_c geht ebenfalls durch S und $TV(CSM_C) = 2$
c) Legt man den Koordinatenursprung an einen beliebigen Ort O, so gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$
d) S ist der Schwerpunkt des Dreieckes. Hinweis: Verwenden Sie das **Prinzip von Cavalieri**, um zu zeigen, dass der Schwerpunkt S liegt auf **jeder der drei Seitenhalbierenden** liegen muss.



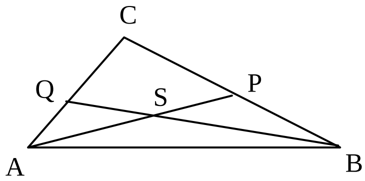
A = O(0⇦0⇦0)

Aufgabe 7: Schwerpunkt eines Tetraeders
Gegeben ist das nebenstehende Tetraeder ABCD. Zeigen Sie:

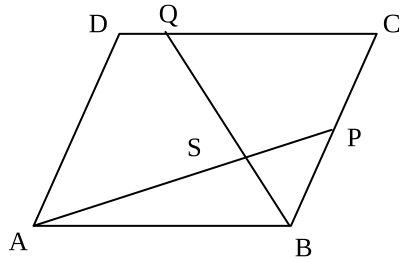
a) Die Schwerlinien AS_a und BS_b schneiden sich im Punkt S mit $TV(ASS_A) = TV(BSS_B) = 3$
b) Die Schwerlinien CS_c uns DS_D gehen ebenfalls durch S und $TV(CSS_C) = TV(DSS_D) = 3$.
c) Legt man den Koordinatenursprung in einen beliebigen Punkt O, so gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$



Aufgabe 8: Teilverhältnisse im Dreieck
In dem Dreieck ABC ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke AC im Verhältnis TV(AQC) = t. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ. Zeigen Sie, dass TV(ASP) = 2t und TV(BSQ) = $\frac{1+t}{t}$.

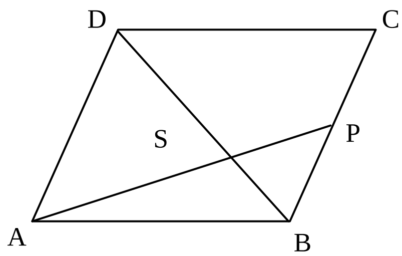


Aufgabe 9: Teilverhältnisse im Parallelogramm
In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q der Mittelpunkt der Strecke CD. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ. Zeigen Sie, dass TV(ASP) = 4 und TV(BSQ) = $\frac{2}{3}$.

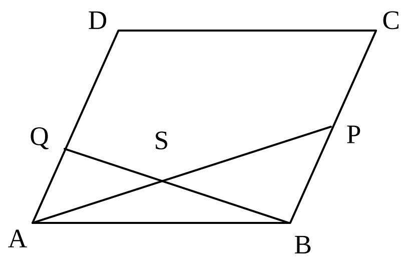


Aufgabe 10: Teilverhältnisse im Parallelogramm
In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke CD im Verhältnis TV(CQD) = t. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ. Zeigen Sie, dass TV(ASP) = $2\frac{1+t}{t}$ und TV(BSQ) = $\frac{1+t}{1+2t}$.

Aufgabe 11: Teilverhältnisse im Parallelogramm
In dem Parallelogramm ABCD teilt P die Strecke BC im Verhältnis TV(BPC) = t. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BD. Zeigen Sie, dass TV(ASP) = $\frac{1+t}{t}$ und TV(BSD) = $\frac{t}{t+1}$.



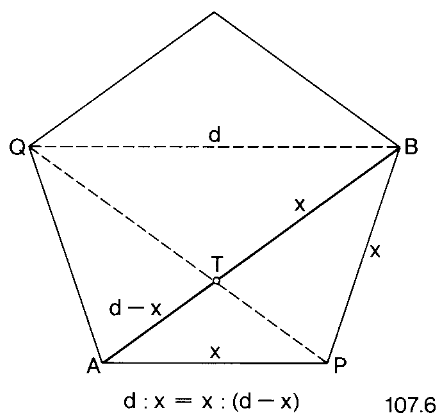
Aufgabe 12: Teilverhältnisse im Parallelogramm
In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke AD im Verhältnis TV(AQD) = t. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ. Zeigen Sie, dass TV(ASP) = $\frac{2t}{1+t}$ und TV(BSQ) = $\frac{1+t}{2t}$.



Aufgabe 13: Goldener Schnitt
Ein Punkt T teilt die Strecke AB im goldenen Schnitt, wenn $\overline{AT}:\overline{TB} = \overline{TB}:\overline{AB}$.

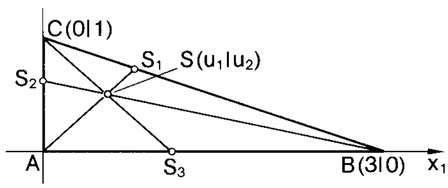
a) Zeigen Sie, das für den goldenen Schnitt TV(ATB) = $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck im goldenen Schnitt teilen (Siehe rechts)



Aufgabe 14: Satz von Ceva
$S(u_1|u_2)$ ist der Schnittpunkt der Strecken AS_1, BS_2 und CS_3.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3 in Abhängigkeit von u_1 und u_2.
b) Berechnen Sie $TV(BS_1C)$, $TV(CS_2A)$ und $TV(AS_3B)$ und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Teilverhältnisse den Wert 1 hat



7.4. Lösungen zu den Aufgaben zu Teilverhältnissen

Aufgabe 1: Schwerpunkte

a) $t = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$

b) $t = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$

c) $t = \frac{1}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$

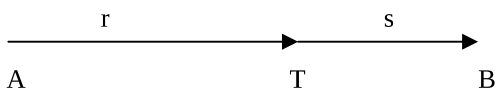
d) $t = \frac{1}{6}$ und $s = \frac{5}{6}$

e) $t = \frac{3}{4}$ und $s = \frac{1}{4}$

f) $t = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ und $s = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Aufgabe 2: Teilverhältnisse

Teilaufgabe	TV(ATB)	TV(BAT)	TV(TBA)	TV(TAB)	TV(BTA)	TV(ABT)
a)	$\frac{1}{3}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3	$-\frac{4}{3}$
b)	-2	$-\frac{1}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$	1
c)	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{6}$	5	-6	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{5}$
allgemein	$\frac{r}{s} = t$	$\frac{-r-s}{r} = -\frac{1+t}{t}$	$\frac{s}{-r-s} = -\frac{1}{1+t}$	$\frac{-r}{r+s} = -\frac{t}{1+t}$	$\frac{-s}{-r} = \frac{1}{t}$	$\frac{r+s}{-s} = -1-t$



Aufgabe 3: Teilverhältnisse

a) $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AQ}$

b) Wegen a) gilt TV(PAQ) = $\frac{4}{5}$

c) Die Mitte M zwischen P und Q erhält man durch den Ortsvektor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$ .Wegen

$\text{TV(ABQ)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt aber auch $B(28|16|12) = M$

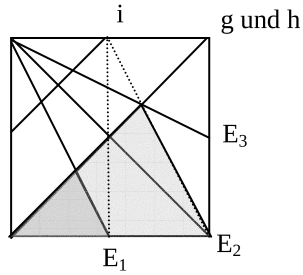
Aufgabe 4: Teilverhältnisse

siehe Aufgabe 1

Aufgabe 5: Teilverhältnisse im Würfel

E_1: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, E_2: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ und E_3: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

g(AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$, h(CD): $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, und i(PQ): $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.



Durch Gleichsetzen erhält man

TV(AS_1B) = $\frac{1}{2}$, TV(AS_2B) = 1 und TV(AS_3B) = 2

TV(CS_1D) = $\frac{1}{2}$, TV(CS_2D) = 1 und TV(CS_3D) = 2

TV(PS_1Q) = $\frac{1}{2}$, TV(PS_2Q) = 1 und TV(PS_3Q) = 2

Da sich die Teilverhältnisse bei der Parallelprojektion nicht ändern, lässt sich die Berechnung durch **Projektion** des Würfels auf die x_2-x_3-Ebene vereinfachen. Die Projektion von h liegt auf der Projektion von g, während die Projektion von i parallel verläuft. Aus der **Symmetrie** zu E_2 folgt zunächst TV(AS_2B) = 1. Aus der Streckung des dunkel schraffierten Dreiecks am Zentrum A um den Faktor 2 auf das hell schraffierte Dreieck folgt TV(AS_1B) = $\frac{1}{2}$. Wieder wegen der Symmetrie zu E_2 folgt TV(AS_3B) = 2. Aus den **Strahlensätzen** folgt dann, dass i und h in den gleichen Verhältnissen geteilt werden wie g.

Aufgabe 6: Schwerpunkt eines Dreieckes
siehe Skript

Aufgabe 7: Schwerpunkt eines Tetraeder
siehe Skript

Aufgabe 8: Teilverhältnisse im Dreieck

linear unabhängige Vektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

geschlossener Vektorzug: $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r\cdot\frac{1}{2}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) + s\cdot(\vec{a} - \frac{t}{1+t}\vec{b}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (s - \frac{1}{2}r - 1)\vec{a} + (\frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t}\cdot s)\,\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit: $\frac{1}{2}r + s - 1 = 0$ und $\frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t}\cdot s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{1+2t}$ und $r = \frac{2t}{1+2t}$

Teilverhältnisse: TV(ASP) = $\frac{r}{1-r} = \frac{2t}{1+2t} : \frac{1}{1+2t} = 2t$ und TV(BSQ) = $\frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{1+2t} : \frac{t}{1+2t} = \frac{1+t}{t}$.

Aufgabe 9: Teilverhältnisse im Parallelogramm
siehe Aufgabe 10

Aufgabe 10: Teilverhältnisse im Parallelogramm

linear unabhängige Vektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

geschlossener Vektorzug: $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r\cdot(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - s\cdot(\vec{b} + \frac{1}{1+t}\vec{a} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r - \frac{1}{1+t}s + s - 1)\vec{a} + (\frac{1}{2}r - \cdot s)\,\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit: $r - \frac{1}{1+t}s + s - 1 = 0$ und $\frac{1}{2}r - \cdot s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{2+3t}$ und $r = \frac{2+2t}{2+3t}$

Teilverhältnisse: TV(ASP) = $\frac{r}{1-r} = \frac{2+2t}{2+3t} : \frac{t}{2+3t} = 2\frac{1+t}{t}$ und TV(BSQ) = $\frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{2+3t} : \frac{1+2t}{2+3t} = \frac{1+t}{1+2t}$.

Aufgabe 11: Teilverhältnisse im Parallelogramm

linear unabhängige Vektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

geschlossener Vektorzug: $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r\cdot(\vec{a} + \frac{t}{1+t}\vec{b}) - s\cdot(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r + s - 1)\vec{a} + (\frac{t}{1+t} r - s)\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit: $r + s - 1 = 0$ und $\frac{t}{1+t} r - s = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1+t}{1+2t}$ und $s = \frac{t}{1+2t}$

Teilverhältnisse: $TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{1+t}{1+2t} : \frac{t}{1+2t} = \frac{1+t}{t}$ und $TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{t}{1+2t} : \frac{1+t}{1+2t} = \frac{t}{1+t}$.

Aufgabe 12: Teilverhältnisse im Parallelogramm

linear unabhängige Vektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

geschlossener Vektorzug: $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r\cdot(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - s\cdot(\frac{t}{1+t}\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r + s - 1)\vec{a} + (\frac{1}{2} r - \frac{t}{1+t} s)\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit: $r + s - 1 = 0$ und $\frac{1}{2} r - \frac{t}{1+t} s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{1+3t}$ und $r = \frac{2t}{1+3t}$

Teilverhältnisse: $TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{2t}{1+3t} : \frac{1+t}{1+3t} = \frac{2t}{1+t}$ und $TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{1+3t} : \frac{2t}{1+3t} = \frac{1+t}{2t}$.

Aufgabe 13: Goldener Schnitt

a) Sei $t = TV(ATB) = \overline{AT} : \overline{TB} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{t}{1+t}\overline{AB}$ und $\overline{TB} = (1 - \frac{t}{1+t})\overline{AB} = \frac{1}{1+t}\overline{AB}$. Gegeben ist $\overline{AT} : \overline{TB} = \overline{TB} : \overline{AB} \Rightarrow t = \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

b) Die gleichschenkligen Dreiecke APT und BQT sind ähnlich, also gilt $\overline{AT} : \overline{TB} = d:x = \overline{TB} : \overline{AB}$

Aufgabe 14: Satz von Ceva

$S_1(\frac{3u_1}{u_1 + 3u_2} \mid \frac{3u_2}{u_1 + 3u_2})$, $S_2(0 \mid \frac{3u_2}{3-u_1})$ und $S_3(\frac{u_1}{1-u_2} \mid 0) \Rightarrow TV(BS_1C) = \frac{3u_2}{u_1}$, $TV(CS_2A) = \frac{3-u_1-3u_2}{3u_2}$ und $TV(AS_3B) = \frac{u_1}{3-3u_2-u_1}$. Das Produkt dieser Teilverhältnisse hat offensichtlich den Wert 1.