7.4. Prüfungsaufgaben zu Teilverhältnissen

Aufgabe 1: Teilverhältnisse (3)

Gegeben sind die Punkte A(2|1|0), B(4|3|0) und C(7|6|0), Berechnen Sie TV(ABC)

Lösung:

TV(ABC) = $\frac{2}{3}$

Aufgabe 2: Teilverhältnisse (3)

Gegeben sind die Punkte A(0|1|2), B(0|4|5) und C(0|6|7), Berechnen Sie TV(ABC)

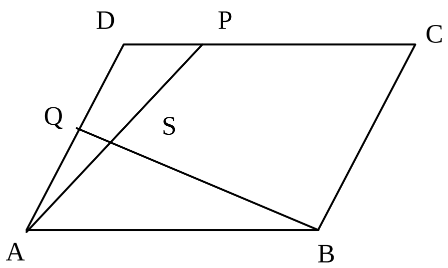
Lösung:

TV(ABC) = $\frac{3}{2}$

Aufgabe 3: Teilverhältnisse (8)

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und die Punkte P und Q mit TV(AQD) = 1 und TV(DPC) = t. Die Strecken BQ und AP schneiden sich im Punkt S.

Zeigen Sie, dass TV(ASP) = $\frac{1+t}{1+2t}$ und TV(BSQ) = 2 + $\frac{2}{t}$.



Lösung

Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

g(AP): $\vec{x} = r\cdot\overrightarrow{AS} = r\cdot(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) = r\cdot(\vec{b} + \frac{t}{1+t}\vec{a})$ (1)

denn wegen TV(DPC) = t ist $\overrightarrow{DP} = t\cdot\overrightarrow{PC} = t\cdot(\vec{a} - \overrightarrow{DP}) \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{t}{1+t}\vec{a}$ (1)

und g(BQ): $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{BQ} = \vec{a} + s\cdot(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$ (1)

Geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$ oder Gleichsetzen g(AP) = g(BQ) (1)

$\Rightarrow \vec{a} + s\cdot(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) - r\cdot(\frac{t}{1+t}\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow (1 - s - r\cdot\frac{t}{1+t})\vec{a} + (\frac{s}{2} - r)\vec{b} = \vec{0}$ (1)

$\Rightarrow r = \frac{1+t}{2+3t}$ und $s = \frac{2+2t}{2+3t}$. (1)

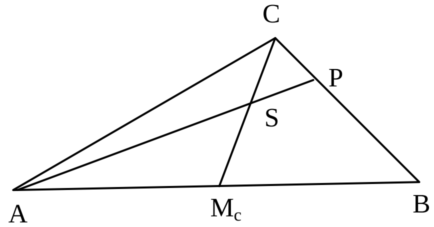
TV(ASP) = $\overline{AS} : \overline{SP} = \frac{1+t}{2+3t} : (1 - \frac{1+t}{2+3t}) = \frac{1+t}{2+3t} : \frac{1+2t}{2+3t} = \frac{1+t}{1+2t}$ (1)

TV(BSQ) = $\overline{BS} : \overline{SQ} = \frac{2+2t}{2+3t} : (1 - \frac{2+2t}{2+3t}) = \frac{2+2t}{2+3t} : \frac{t}{2+3t} = 2 + \frac{2}{t}$. (1)

Aufgabe 4: Teilverhältnisse (8)

In einem Dreieck ABC ist M_c der Mittelpunkt der Seite AB. Der Punkt P teilt die Strecke BC im Verhältnis TV(BPC) = t. Die Seitenhalbierende M_cC und die Strecke AP schneiden sich im Punkt S.

Zeigen Sie, dass TV(ASP) = 1 + t und TV(M_cSC) = $\frac{t}{2}$.



Lösung

Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

g(AP): $\vec{x} = r\cdot\overrightarrow{AP} = r\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = r\cdot(\frac{1}{1+t}\vec{a} + \frac{t}{1+t}\vec{b})$ (1)

denn wegen TV(BPC) = t ist $\overrightarrow{BP} = \frac{t}{1+t}(\vec{b} - \vec{a})$ (1)

g(M_cC): $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{M_cC} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\cdot(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a})$ (1)

Geschlossene Vektorkette $\overrightarrow{AM_c} + \overrightarrow{M_cS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$ oder Gleichsetzen g(AP) = g(M_cC): (1)

$\Rightarrow r\cdot(\frac{1}{1+t}\vec{a} + \frac{t}{1+t}\vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{a} - s\cdot(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\frac{1}{1+t}r - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s)\vec{a} + (\frac{t}{1+t}r - s)\vec{b} = \vec{0}$ (1)

$\Leftrightarrow r = \frac{1+t}{2+t}$ und $s = \frac{t}{2+t}$. (1)

TV(ASP) = $\overline{AS} : \overline{SP} = \frac{1+t}{2+t} : (1 - \frac{1+t}{2+t}) = \frac{1+t}{2+t} : \frac{1}{2+t} = 1 + t$ (1)

TV(M_cSC) = $\overline{M_cS} : \overline{SC} = \frac{t}{2+t} : (1 - \frac{t}{2+t}) = \frac{t}{2+t} : \frac{2}{2+t} = \frac{t}{2}$. (1)

Aufgabe 5: Teilverhältnisse (4)

In einem Viereck ABCD gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0{,}4\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Zeichnen Sie ein solches Viereck ABCD.
In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonalen geteilt? (4 VP)

Lösung

Zeichnung (1)

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ erhält man $r(0{,}4\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + s(\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow (9{,}4r + s - 1)\vec{a} + (r - s)\vec{b} = 0$. (1)

Wegen der linearen Unabhängigkeit van $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich $0{,}4r + s - 1 = 0$ und $r - s = 0$ mit der Lösung $r = s = \frac{5}{7}$. (1)

Die Diagonale AC wird von der anderen Diagonalen im Verhältnis 5 : 2 geteilt. Eine Begründung mit dem Strahlensatz ist ebenfalls möglich. (1)