

## 7.4. Prüfungsaufgaben zu Teilverhältnissen

### Aufgabe 1: Teilverhältnisse (3)

Gegeben sind die Punkte  $A(2|1|0)$ ,  $B(4|3|0)$  und  $C(7|6|0)$ , Berechnen Sie  $TV(ABC)$

**Lösung:**

$$TV(ABC) = \frac{2}{3}$$

### Aufgabe 2: Teilverhältnisse (3)

Gegeben sind die Punkte  $A(0|1|2)$ ,  $B(0|4|5)$  und  $C(0|6|7)$ , Berechnen Sie  $TV(ABC)$

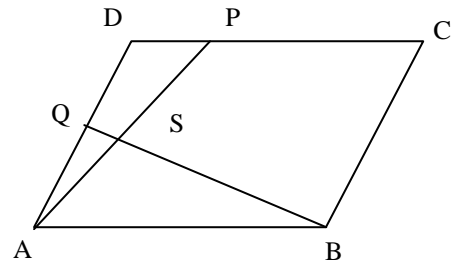
**Lösung:**

$$TV(ABC) = \frac{3}{2}$$

### Aufgabe 3: Teilverhältnisse (8)

Gegeben ist das Parallelogramm  $ABCD$  und die Punkte  $P$  und  $Q$  mit  $TV(AQD) = 1$  und  $TV(DPC) = t$ . Die Strecken  $BQ$  und  $AP$  schneiden sich im Punkt  $S$ .

Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) = \frac{1+t}{1+2t}$  und  $TV(BSQ) = 2 + \frac{2}{t}$ .



**Lösung**

Es sei  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ .

$$g(AP): \vec{x} = r \cdot \overrightarrow{AS} = r \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) = r \cdot (\vec{b} + \frac{t}{1+t} \vec{a}) \quad (1)$$

$$\text{denn wegen } TV(DPC) = t \text{ ist } \overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{PC} = t \cdot (\vec{a} - \overrightarrow{DP}) \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{t}{1+t} \vec{a} \quad (1)$$

$$\text{und } g(BQ): \vec{x} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BQ} = \vec{a} + s \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}) \quad (1)$$

$$\text{Geschlossene Vektorkette } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0} \text{ oder Gleichsetzen } g(AP) = g(BQ) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{a} + s \cdot (\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}) - r \cdot (\frac{t}{1+t} \vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow (1 - s - r \cdot \frac{t}{1+t}) \vec{a} + (\frac{s}{2} - r) \vec{b} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1+t}{2+3t} \text{ und } s = \frac{2+2t}{2+3t}. \quad (1)$$

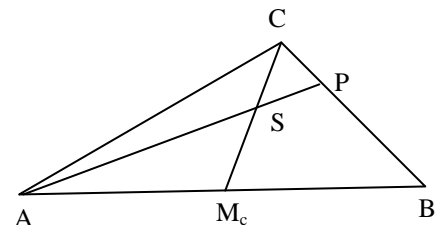
$$TV(ASP) = \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SP} = \frac{1+t}{2+3t} : (1 - \frac{1+t}{2+3t}) = \frac{1+t}{2+3t} : \frac{1+2t}{2+3t} = \frac{1+t}{1+2t} \quad (1)$$

$$TV(BSQ) = \overrightarrow{BS} : \overrightarrow{SQ} = \frac{2+2t}{2+3t} : (1 - \frac{2+2t}{2+3t}) = \frac{2+2t}{2+3t} : \frac{t}{2+3t} = 2 + \frac{2}{t}. \quad (1)$$

### Aufgabe 4: Teilverhältnisse (8)

In einem Dreieck  $ABC$  ist  $M_c$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$ . Der Punkt  $P$  teilt die Strecke  $BC$  im Verhältnis  $TV(BPC) = t$ . Die Seitenhalbierende  $M_cC$  und die Strecke  $AP$  schneiden sich im Punkt  $S$ .

Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) = 1 + t$  und  $TV(M_cSC) = \frac{t}{2}$ .



### Lösung

Es sei  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

$$g(AP): \vec{x} = r \cdot \overrightarrow{AP} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = r \cdot \left( \frac{1}{1+t} \vec{a} + \frac{t}{1+t} \vec{b} \right) \quad (1)$$

$$\text{denn wegen } TV(BPC) = t \text{ ist } \overrightarrow{BP} = \frac{t}{1+t} (\vec{b} - \vec{a}) \quad (1)$$

$$g(M_c C): \vec{x} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{M_c C} = \frac{1}{2} \vec{a} + s \cdot \left( \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) \quad (1)$$

$$\text{Geschlossene Vektorkette } \overrightarrow{AM_c} + \overrightarrow{M_c S} + \overrightarrow{SA} = \vec{0} \text{ oder Gleichsetzen } g(AP) = g(M_c C): \quad (1)$$

$$\Rightarrow r \cdot \left( \frac{1}{1+t} \vec{a} + \frac{t}{1+t} \vec{b} \right) - \frac{1}{2} \vec{a} - s \cdot \left( \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{1+t} r - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s \right) \vec{a} + \left( \frac{t}{1+t} r - s \right) \vec{b} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1+t}{2+t} \text{ und } s = \frac{t}{2+t}. \quad (1)$$

$$TV(ASP) = \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SP} = \frac{1+t}{2+t} : \left( 1 - \frac{1+t}{2+t} \right) = \frac{1+t}{2+t} : \frac{1}{2+t} = 1+t \quad (1)$$

$$TV(M_c SC) = \overrightarrow{M_c S} : \overrightarrow{SC} = \frac{t}{2+t} : \left( 1 - \frac{t}{2+t} \right) = \frac{t}{2+t} : \frac{2}{2+t} = \frac{t}{2}. \quad (1)$$

### Aufgabe 5: Teilverhältnisse (4)

In einem Viereck ABCD gilt für die Diagonale AC:  $\overrightarrow{AC} = 0,4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

Zeichnen Sie ein solches Viereck ABCD.

In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonalen geteilt? (4 VP)

### Lösung

Zeichnung (1)

Mit  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$  erhält man  $r(0,4\vec{a} + \vec{b}) =$

$$\vec{a} + s(\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow (9,4r + s - 1) \vec{a} + (r - s) \vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ergibt sich  $0,4r + s - 1 = 0$  und  $r - s = 0$  mit der Lösung

$$r = s = \frac{5}{7}. \quad (1)$$

Die Diagonale AC wird von der anderen Diagonalen im Verhältnis 5 : 2 geteilt. Eine Begründung mit dem Strahlensatz ist ebenfalls möglich. (1)

