7.5. Fragen zu Beweisaufgaben mit dem Skalarprodukt

Aufgabe 1
In einem Tetraeder sind alle Kanten gleich lang und alle von den Kanten eingeschlossenen Winkel gleich groß. Legen Sie den Koordinatenursprung in eine der Ecken und zeigen Sie, dass je zwei gegenüberliegende Kanten zueinander orthogonal sind.

Lösung
gegeben:

gleiche Kantenlängen: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{b}-\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{b}|$

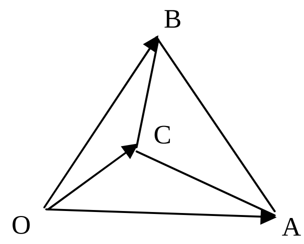
gleiche Kantenwinkel: $\vec{a}*\vec{b} = \vec{a}*\vec{c} = \vec{b}*\vec{c}$

zu zeigen:

$\vec{a}*(\vec{c}-\vec{b}) = 0$, $\vec{b}*(\vec{c}-\vec{a}) = 0$ und $\vec{c}*(\vec{b}-\vec{a}) = 0$

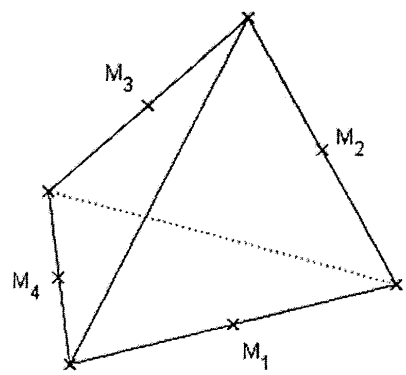
Beweis:

$\vec{a}*(\vec{c}-\vec{b}) = \vec{a}*\vec{c} - \vec{a}*\vec{b} = 0$, u.s.w.

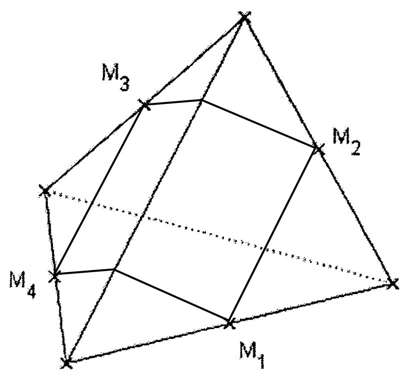


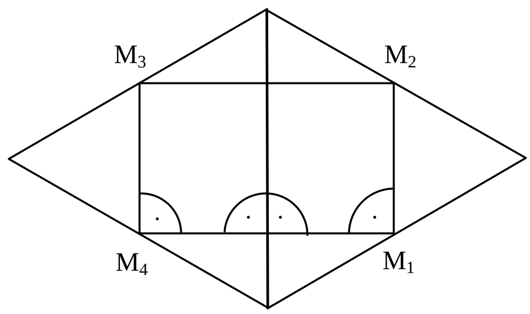
Aufgabe 2 (5)
Ein Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide mit sechs gleich langen Kanten.
Die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 bezeichnen wie in der Abbildung die Mitten der entsprechenden Tetraederkanten.

a) Weisen Sie nach, dass die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 in einer Ebene liegen.
b) Weisen Sie nach, dass das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ eine Raute ist.



Lösung
1. Version
Klappt man zwei Seitenflächen des Tetraeders auf und legt sie in die Ebene, so erkennt man, dass die beiden Verbindungsstrecken der Seitenmitten M_1M_2 und M_3M_4 parallel und gleich lang sind. Da sie außerdem parallel zur Klappachse AB sind, bleibt die Parallelität bei der Drehung um diese Achse erhalten:





2. Version
Ein Tetraeder mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$ kann in einen Würfel mit der Kantenlänge 1 gelegt werden. Die Ecken haben dann z.B. die Koordinaten A(0|0|0), B(1|1|0), C(1|0|1) und D(0|1|1). Die Seitenmitten haben dann die Koordinaten $M_1(0{,}5|0|0{,}5)$, $M_2(1|0{,}5|0{,}5)$, $M_3(0{,}5|1|0{,}5)$ und $M_4(0|0{,}5|0{,}5)$. Die gegenüber liegenden Verbindungslinien $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind jeweils parallel. Außerdem sind alle Verbindungsvektoren gleich lang und liegen in der x_1x_2-Ebene, d.h., sie bilden eine Raute. (da sie offensichtlich senkrecht aufeinander stehen, bilden sie sogar ein Quadrat!)

3. Version

Die Ecken eines Tetraeders mit der Seitenlänge 2 haben z.B. die Koordinaten A(0|0|0), B(2|0|0), C(1| $\sqrt{3}$ |0) und D(1| $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\frac{2}{3}\sqrt{6}$). Die Seitenmitten haben dann die Koordinaten M_1(1|0|0), M_2($\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |0), M_3(1| $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{6}$) und M_4($\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{6}$). Die gegenüber liegenden Verbindungslinien $\overrightarrow{M_1M_2} = \overline{M_4M_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ sind jeweils parallel und liegen daher in einer gemeinsamen Ebene.

Außerdem haben alle Verbindungsvektoren die gleiche Länge 1, d.h., sie bilden eine Raute.