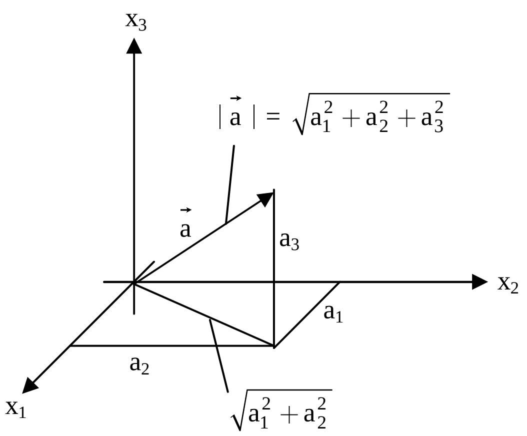
# 7.5. Skalarprodukt und Vektorprodukt

## 7.5.1. Das Skalarprodukt

Das **Matrizenprodukt** eines Zeilenvektors $\vec{a}^{\,T} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ mit einem Spaltenvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist allgemein definiert als $\vec{a}^{\,T} * \vec{b} = (a_1;\ a_2;\ a_3) * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1{\cdot}b_1 + a_2{\cdot}b_2 + a_3b_3$. Bei der Beschränkung auf Spaltenvektoren mit einer festen Zeilenzahl (2 oder 3) vereinfacht man diese Definition, indem man die Transponierung weg lässt:

**Das Skalarprodukt**
Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren erhält man, indem man die jeweiligen Komponenten multipliziert und anschließend addiert: $\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1{\cdot}b_1 + a_2{\cdot}b_2 + a_3b_3$. Im Gegensatz zum allgemeinen Matrizenprodukt ist das Skalarprodukt **vertauschbar**: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$. Die übrigen Rechenregeln (Distributiv- und Assoziativgesetze) der Matrizenmultiplikation gelten natürlich weiterhin.

**Der Betrag eines Vektors:**
Der **Betrag** $|\vec{a}|$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist die Länge seiner Verschiebungsstrecke und berechnet sich nach Pythagoras zu $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$. Vektoren vom Betrag 1 heißen **Einheitsvektoren**. Für einen gegebenen Vektor $\vec{a}$ erhält man den zugehörigen Einheitsvektor als $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.




*Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 1 - 3*

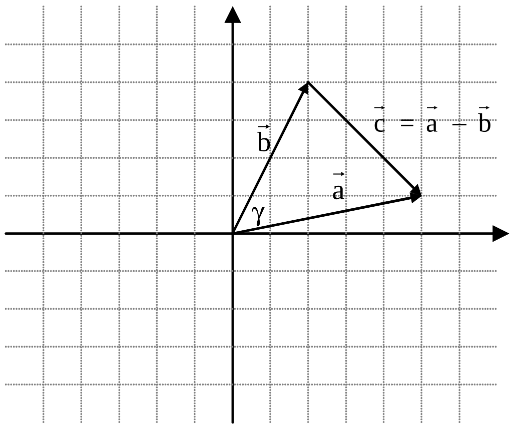
## 7.5.2. Berechnung eingeschlossener Winkel mit dem Skalarprodukt

Aus dem Kosinussatz und dem Betrag ergibt sich eine sehr nützliche geometrische Interpretation des Skalarproduktes:

| |
|---|
| **Winkelberechnung mit dem Skalarprodukt**<br>Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt ihrer Längen mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels: $\vec{a} \ast \vec{b} = \vert\vec{a}\vert \cdot \vert\vec{b}\vert \cdot \cos\gamma$<br>Insbesondere gilt<br><br>$\vec{a} \ast \vec{b} = \vert\vec{a}\vert \cdot \vert\vec{b}\vert \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **parallel** ($\gamma = 0°$)<br>$\vec{a} \ast \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** ($\gamma = 90°$) |

**Beweis:**

Man formuliert den Kosinussatz mit $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ und löst nach $\vec{a} * \vec{b}$ auf:

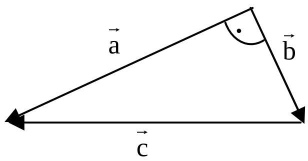



$$
\begin{array}{rcll}
\vert\vec{c}\vert^2 & = & \vert\vec{a}\vert^2 + \vert\vec{b}\vert^2 - 2\cdot\vert\vec{a}\vert\cdot\vert\vec{b}\vert\cdot\cos & \vert \text{ Einsetzen } \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \\
\vert\vec{a} - \vec{b}\vert^2 & = & \vert\vec{a}\vert^2 + \vert\vec{b}\vert^2 - 2\cdot\vert\vec{a}\vert\cdot\vert\vec{b}\vert\cdot\cos\gamma & \vert\cdot\vert\vec{a}\vert^2 = \left(\sqrt{\vec{a}\ast\vec{a}}\right)^2 = \vec{a}\ast\vec{a}\text{, u.s.w} \\
(\vec{a} - \vec{b}) \ast (\vec{a} - \vec{b}) & = & \vec{a}\ast\vec{a} + \vec{b}\ast\vec{b} - 2\cdot\vert\vec{a}\vert\cdot\vert\vec{b}\vert\cdot\cos\gamma & \vert \text{ Klammern auflösen} \\
\vec{a}\ast\vec{a} - 2\cdot\vec{a}\ast\vec{b} + \vec{b}\ast\vec{b} & = & \vec{a}\ast\vec{a} + \vec{b}\ast\vec{b} - 2\cdot\vert\vec{a}\vert\cdot\vert\vec{b}\vert\cdot\cos\gamma & \vert \text{ nach } a\ast b \text{ auflösen} \\
\vec{a}\ast\vec{b} & = & \vert\vec{a}\vert\cdot\vert\vec{b}\vert\cdot\cos\gamma &
\end{array}
$$

*Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 4 - 6*

## 7.5.3. Geometrische Beweise mit dem Skalarprodukt

**Beispiel:**
Beweisen Sie den Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.
**Lösung**
gegeben: $\vec{a} * \vec{b} = 0$
zu zeigen: $c^2 = a^2 + b^2$
Beweis: $\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2$
$= \vec{a}^{\,2} - 2\cdot\vec{a} * \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$
$= \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}$, qed




*Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 5*

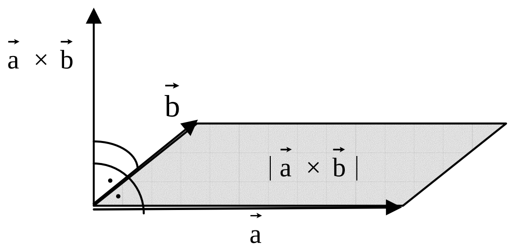
### 7.5.4. Das Vektorprodukt

Mit Hilfe des Vektorproduktes lassen sich orthogonale Vektoren und Flächen einfach berechnen. Das Vektorprodukt selbst ist etwas gewöhnungsbedürftig. Die Beweise seiner Eigenschaften sind entsprechend unübersichtlich und daher hier nicht angegeben.

**Das Vektorprodukt**
Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren erhält man, indem man die jeweils anderen Komponenten kreuzweise multipliziert und addiert: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ -(a_1b_3 - b_1a_3) \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$. Das Vektorprodukt ist **antikommutativ**: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Die Distributiv- und Assoziativgesetze sind weiterhin gültig.

**Flächenberechnungen und Normalenvektoren mit dem Vektorprodukt**

- Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.
- Seine Länge $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gleich der **Fläche** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Insbesondere gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\gamma$, wobei $\gamma$ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene **Winkel** ist.




**Beispiel zur Anwendung des Vektorproduktes**

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(1|−2|3), B(−2|1|4) und C(3|2|−1).
b) Bestimme die Gleichung der Geraden g, die senkrecht zu der von ABC aufgespannten Ebene durch den Punkt A verläuft.

**Lösung**

a) $A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{170}\ \text{FE} \approx 13{,}03\ \text{FE}$

b) g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $r = -2t \in \mathbb{R}$.

*Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 6 - 10*