7.6. Aufgaben zu Normalenformen

Aufgabe 1: Normalenform der Ebenengleichung

Bestimmen Sie eine Gleichung für die Punkte P mit den Ortsvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, die in der Ebene E liegen, welche durch den Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ verläuft und senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$ steht.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Umwandlung Parameterform → Normalenform

Bestimmen Sie die Normalenform der Ebene E:

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Umwandlung Normalenform → Parameterform

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E:

a) E: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 24$
b) E: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$
c) E: $4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$

Aufgabe 4: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Spurgeraden

Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Spurgeraden und zeichnen Sie einen entsprechenden Ausschnitt von E in ein Koordinatensystem.

a) E: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$
b) E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$
c) E: $4x_1 - 2x_2 - x_3 = 8$
d) E: $-2x_1 - x_2 - 3x_3 = 6$
e) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Gemeinsame Punkte zweier Ebenen

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Ebenen E und F:

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und F: $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$
b) E: $x_3 = 1$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
c) E: $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ und F: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
d) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und F: $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$

Aufgabe 6: Gemeinsame Punkte zweier Ebenen

Begründen Sie geometrisch, warum ein LGS mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen entweder keine oder unendlich viele Lösungen aber niemals eine einzige Lösung haben kann.

Aufgabe 7: Lage zweier Ebenen

1. Zeigen Sie, das die beiden Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.
2. Bestimmen Sie die Koordinatenform sowie alle Achsenschnittpunkte.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Normalenform der Geradengleichung

Stellen Sie die Gerade g als Schnittgerade zweier Ebenen dar, indem sie die Koordinatenformen für zwei geeignete Ebenen E und F formulieren.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 9: Umwandlung Parameterform → Normalenform

Geben Sie jeweils eine entsprechende Koordinaten- bzw. Parameterform für die Gerade g an:

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ b) g: $\begin{vmatrix}-x_1 + x_2 & = 2\\ x_1 + 2x_3 & = 3\end{vmatrix}$ c) g: $\begin{vmatrix}x_1 - x_2 + 2x_3 & = 4\\ x_3 & = 1\end{vmatrix}$

Aufgabe 10: Gemeinsame Punkte von Ebenen und Geraden

Geben Sie die gemeinsamen Punkte der Ebene E und der Geraden g an.

a) E: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ und g: $\begin{vmatrix}x_1 - x_2 + 2x_3 & = 4\\ x_2 - x_3 & = -2\end{vmatrix}$

b) E: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ und g: $\begin{vmatrix}x_1 - x_2 + 2x_3 & = 4\\ x_2 - x_3 & = -2\end{vmatrix}$

c) E: $x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$ und g: $\begin{vmatrix}x_1 - x_2 + 2x_3 & = 4\\ x_2 - x_3 & = -2\end{vmatrix}$

Aufgabe 11: Gemeinsame Punkte von Ebenen und Geraden

Ein LGS mit drei Gleichungen für drei Unbekannte kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben. Deuten Sie diese drei Fälle geometrisch durch Betrachtung der gegenseitigen Lage

a) einer Ebene E und einer Geraden g
b) dreier Ebenen E, F und G zueinander

Aufgabe 12: Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

1. Bestimmen Sie die Spurpunkte und Spurgeraden der Ebene E.
2. Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden g.
3. Bestimmen Sie E ∩ g und zeichnen Sie E und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

b) E: $2x_1 + 3x_2 + x_3 = -6$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

c) E: $-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

7.6. Lösungen zu den Aufgaben zu Normalenformen

Aufgabe 1: Normalenform der Ebenengleichung

a) $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ b) $x_1 + x_2 - x_3 = 3$ c) $-3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5$

Aufgabe 2: Umwandlung Parameterform → Normalenform

a) $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$ b) $x_1 - 2x_2 + x_3 = -6$ c) $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10$

Aufgabe 3: **Umwandlung Normalenform → Parameterform** (Beispiele)

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Spurgeraden

a) $S_{12}(0|0|-2)$, $S_{13}(0|-4|0)$ und $S_{23}(-6|0|0)$

b) $S_{12}(0|0|-2)$, $S_{13}(0|2|0)$ und $S_{23}(4|0|0)$

c) $S_{12}(0|0|-8)$, $S_{13}(0|-4|0)$ und $S_{23}(-2|0|0)$

d) $S_{12}(0|0|-2)$, $S_{13}(0|-6|0)$ und $S_{23}(-3|0|0)$

e) E: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \Rightarrow S_{12}(0|0|4)$, $S_{13}(0|3|0)$ und $S_{23}(2|0|0)$

Aufgabe 5: Gemeinsame Punkte (=Schnittgeraden) zweier Ebenen

a), b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$ d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Gemeinsame Punkte zweier Ebenen

Ein LGS aus zwei Gleichungen mit drei Unbekannten kann als Schnittmenge zweier Ebenen im dreidimensionalen Raum betrachtet werden. Die beiden Ebenen sind parallel (keine Lösung), besitzen eine Schnittgerade (eindimensionale unendlich viele Lösungen) oder sind identisch (zweidimensional unendlich viele Lösungen) Da zwei Ebenen sich nicht ausschließlich in einem Punkt schneiden können, kann es keine eindeutige Lösung geben.

Aufgabe 7: Lage zweier Ebenen

a) E: $x_2 = 1$ mit $P_y(0;\ 1;\ 0)$ und F: $x_2 = 2$ mit $P_y(0;\ 2;\ 0)$ E und F haben den gleichen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

b) E: $x_2 + x_3 = 2$ mit $P_y(0;\ 2;\ 0)$ und $P_z(0;\ 0;\ 2)$ und E: $x_2 + x_3 = 4$ mit $P_y(0;\ 4;\ 0)$ und $P_z(0;\ 0;\ 4)$ E und F haben den gleichen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Normalenform der Geradengleichung (**Beispiele**)

a) $\begin{vmatrix} x_2 & =1 \\ x_1 - x_3 & =1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x_1 + x_2 & =2 \\ x_3 & =2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 & =0 \\ -2x_1 + x_3 & =1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 9: Umwandlung Parameterform → Normalenform (Beispiele)

a) g: $\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 & =8 \\ 3x_2 - x_3 & =5 \end{vmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1,5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-0,5\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 10: Gemeinsame Punkte von Ebenen und Geraden

a) $E \cap g = \{\}$ b) $E \cap g = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}$ c) $E \cap g = g = \left\{\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} : t \in R\right\}$

Aufgabe 11: Gemeinsame Punkte von Ebenen und Geraden
Ein LGS aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten kann als Schnittmenge dreier Ebenen im dreidimensionalen Raum betrachtet werden. Die drei Ebenen sind parallel (keine Lösung), besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt, an dem sich alle drei Schnittgeraden treffen (eindeutige Lösung) besitzen alle drei eine gemeinsame Schnittgerade (eindimensional unendlich viele Lösungen) oder sind identisch (zweidimensional unendlich viele Lösungen).

Aufgabe 12: Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

a) Spurpunkte von E: $P_1(4|0|0)$, $P_2(0|4|0)$, $P_3(0|0|2)$
Spurpunkte von g: $P_1(0|2|2)$, $P_2(-1|0|1)$, $P_3(-2|-2|0)$
$E \cap g = P(-0{,}4|1{,}2|1{,}6)$

b) Spurpunkte von E: $P_1(-3|0|0)$, $P_2(0|-2|0)$, $P_3(0|0|-6)$
Spurpunkte von g: $P_1(0|4|-2)$, $P_2(-2|0|-4)$, $P_3(2|8|0)$
$E \cap g = P(-\frac{50}{9} \mid \frac{4}{9} \mid -\frac{34}{9})$

c) Spurpunkte von E: $P_1(-4|0|0)$, $P_2(0|3|0)$, $P_3(0|0|2)$
Spurpunkte von g: $P_1(0|1|0)$, $P_2(1|0|1)$, $P_3(0|1|0)$
$E \cap g = P(-\frac{2}{39} \mid \frac{21}{13} \mid \frac{8}{13})$