7.6. Prüfungsaufgaben zu Normalenformen

Aufgabe 1 (5)

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene E: $(\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n} = 0$.

a) Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ bzw. $\vec{p}$ und $\vec{n}$? Veranschaulichen Sie ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

b) Welche Beziehungen müssen für die obigen Vektoren gelten, damit i) g parallel zu E ist bzw. ii) g senkrecht zu E verläuft?

Lösung

a) $\vec{a}$ = Stützvektor, $\vec{u}$ = Richtungsvektor, $\vec{p}$ = Stützvektor, $\vec{n}$ = Normalenvektor (2)
Skizze (1)

b) g parallel zu E $\Leftrightarrow$ $\vec{n} * \vec{u} = 0$ bzw. g senkrecht zu E $\Leftrightarrow$ $\vec{n} = t\cdot\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$. (2)

Aufgabe 2 (5)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Geben Sie einen Richtungsvektor $\vec{u}$ an, so dass die Gerade g

a) parallel zur x_1-Achse (1)
b) parallel zur x_2-x_3-Ebene (1)
c) orthogonal zur Ebene E: $3x_1 + 4x_3 = 12$ (1)
d) parallel zur Ebene E: $3x_1 + 4x_3 = 12$ (2)

ist und begründen Sie kurz ihre Wahl

Lösung

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (klar) b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (parallel zur x_2-Achse) c) $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ (Normalenvektor von E) d) $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ orthogonal zum Normalenvektor, da $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 3 (4)

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene E: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ ist.

b) Geben Sie die Gleichung der Ebene F an, die orthogonal zur Ebene E verläuft und die Gerade g enthält

Lösung

a) Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E sind orthogonal, da $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$ (1)

b) F: $(\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n} = 0$ mit Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und Normalenvektor $\vec{n}$ orthogonal zu $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ F: $x_1 - x_3 = 2$ (3)

Aufgabe 4a (3)

Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt A(2 | −1 | −2) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ enthält.

Lösung
E: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$

Question 4b (14)

a) Find the common points of E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix} + s_1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ and E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix} + s_2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ using the GDC. (4)
b) Find the coordinate equations of E_1 and E_2. (4)
c) Find the coordinate equations of E_1 and E_2using the coordinate equations. This time work out every single step of the calculation by hand. (4)
d) Show that the results from a) and c) are identical. (2)

Question 4b (14)

a) $E_1 \cap E_2$ results in the system of linear equations $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -2 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & -1 & -5 & -10\end{array}\right)$ with the solutions $E_1 \cap E_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$
with $s_1 = 1 + \tau$, $t_1 = 1 - 2\tau$ and $s_2 = 1 + 2\tau$, $t_2 = 1 - \tau$ (4)
b) E_1: $-6x - 6y = -12 \Leftrightarrow x + y = 2$ and E_2: $-6x - 9y + 3z = -12 \Leftrightarrow 2x + 3y - z = 4$. (4)
c) With parameter $t = x \in \mathbb{R}$ we obtain $y = 2 - t$ and $z = 2t + 3\cdot(2 - t) - 4 = 2 - t \Rightarrow E_1 \cap E_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. (4)
d) With $t = 3\tau + 1 \Leftrightarrow \tau = \frac{t}{3} - \frac{1}{3}$ this line is identical to the result from a) (2)

Aufgabe 5 (3)
Spiegeln Sie den Punkt A(5 | −3 | 0) an der Ebene E: $x_2 - 3x_3 = 7$.

Lösung
Lotfußpunkt L(5 | −2 | −3) und Spiegelpunkt A'(5 | −1 | −6)

Aufgabe 6 (4)
Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$ und E_2: $5x_2 - 10 = 0$. Stellen Sie die beiden Ebenen E_1 und E_2in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ein. Geben Sie die Gleichung dieser Schnittgeraden an.

Lösung

$E_1 \cap E_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (3)

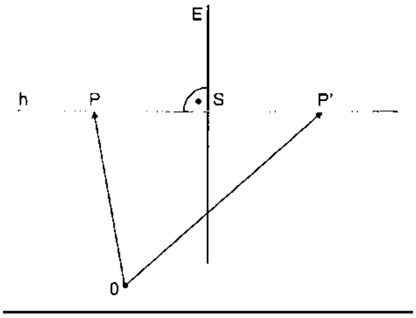
Eine Parameterform der Ebenegleichung ist g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. (1)

Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \times\cdot \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-8\\12\end{pmatrix}$ oder gekürzt $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (1)

Durch Einsetzen des Stützvektors erhält man die Koordinatenform $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ (1)

Aufgabe 8 (3)
Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt. P wird an E gespiegelt. Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P zu bestimmen. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Lösung



1. Man bestimmt die Lotgerade h durch P zur Eben E. Ihr Richtungsvektor ist ein Normalenvektor von E. Ihr Stützvektor ist der Ortsvektor von P. h: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\cdot \vec{n}$
2. Man berechnet den Schnittpunkt S = h ∩ E z.B. durch Einsetzen von h in die Koordinatenform von E.
3. Den Ortsvektor des Bildpunktes P' erhält man durch Verdoppeln des in b) berechneten Parameters: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PS}$

Aufgabe 9 (7)
Die Punkte A(1 | 0 10), B(0 | 3 | 2) und C(2 | 2 | −2) legen eine Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Beschreiben Sie die besondere Lage von E und stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.
(Teilergebnis: E: $2x_1 + x_3 = 2$)(4 VP)

b) Spiegelt man E an der x_2x_3-Ebene, so erhält man die Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung von F.
Stellen Sie F im vorhandenen Koordinatensystem dar.
Die Ebene E kann auch durch eine Drehung um die x_2-Achse auf die Ebene F abgebildet werden. Bestimmen Sie einen möglichen Drehwinkel. (3 VP)

Lösung

a) Parametergleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\0\\-5\end{pmatrix}$ (1)

E: $-10x_1 - 5x_3 = -10 \Leftrightarrow 2x_1 + x_3 = 2$ verläuft parallel zur x_2-Achse durch A(1 | 0 | 0) (1)
Skizze (2)

b) F: $-2x_1 + x_3 = -2$ (1)
Skizze (1)
Drehwinkel $\alpha = 2\cdot\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 53{,}1°$ (1)

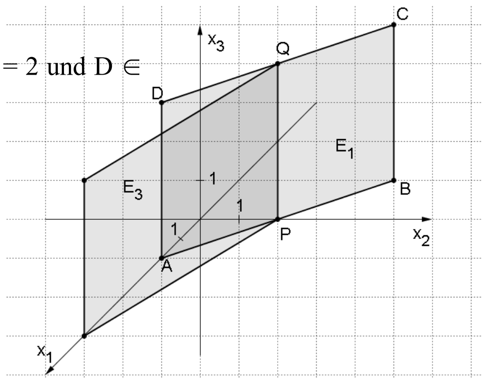
Aufgabe 10 (12)
Ein rechteckiger Spiegel ist um eine Achse drehbar. In der Ausgangslage befinden sich die Eckpunkte des Spiegels in A(2 | 0 | 0), B(−2 | 4 | 0), C(−2 | 4 | 4) und D(2 | 0 | 4). Die Drehachse verläuft durch die Punkte P(0 | 2 | 0) und Q(0 | 2 | 4).
Weiterhin ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_t durch die Gleichung E_t: $x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben.

a) Zeichnen Sie den Spiegel und die Strecke PQ in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass der Spiegel in der Ausgangslage in der Ebene E_1 liegt.
Zeichnen Sie die Ebene E_2 ein.
Der Spiegel dreht sich nun so, dass er in der Ebene E_2 liegt. Um welchen Winkel hat er sich dabei gedreht? (5)

b) Zeigen Sie, dass jede Ebene E_t eine mögliche Lage des Spiegels darstellt.
Beschreiben Sie, wie sich die Lage von E_1 für $t \to \infty$ verändert.
Welche Stellung des Spiegels wird durch keine Ebene E_t dargestellt?
Im Punkt L(6 | 8 | 1) befindet sich eine Lichtquelle, welche einen Lichtstrahl mit der Richtung $\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}$ aussendet. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Spiegel unabhängig von dessen Stellung immer im gleichen Punkt trifft, sofern der Spiegel nicht parallel zum Lichtstrahl ist (7)

Lösung

a) Zeichnung (2)



Der Spiegel liegt in E_1: $x_1 + x_2 = 2$, weil: $A \in E_1$ wegen $2 + 0 = 2$, b $\in E_1$ wegen $-2 + 4 = 2$, C E $\in E_1$ wegen $-2 + 4 = 2$ und D $\in$ E_1 wegen $2 + 0 = 2$ (1)

Normalenvektoren für E_1 und E_2 sind z.B.

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

Der Winkel zwischen E_1 und E_2 ist damit

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 26{,}6°$ (1)

b) Die Punkte P und Q und damit die Drehachse sind in jeder Ebene E_t enthalten, denn $P \in E_t$ wegen $2t = 2t$ und $Q \in E_t$ wegen $2t = 2t$. Jede Ebene E_t enthält also eine mögliche Lage des Spiegels. (1)

Alle Ebenen E_t enthalten die senkrechte Achse PQ. Für $t \to \infty$ wandert der Schnittpunkt $S_{1t}(2t \mid 0 \mid 0)$ auf der x_1-Achse immer weiter nach vorn, so dass sich die Ebene einer zur x_1-x_2-Eben parallelen Lage annähert. (2)

Die zur x_1-x_2-Eben parallele Endlage $x_2 = 2$ wird durch keine Ebene E_t dargestellt, da $t \neq \infty$. (1)

Lichtstrahl g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s > 0$. $g \cap E_1 \Leftrightarrow (6 - 3s) + t(8 - 3s) = 2t \Leftrightarrow (-3 - 3t)s = -6 - 6t \Leftrightarrow s = 2$, falls $t \neq -1$. Der Lichtstrahl trifft E_t unabhängig von t im Punkt $T(0 \mid 2 \mid 3)$, falls $t \neq -1$. (2)

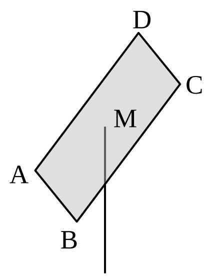
Im Fall $t = -1$ hat die Ebene E_{-1}: $x_1 - x_2 = -2$ den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Lichtstrahls, d.h. $g \parallel E_{-1}$. (1)

Aufgabe 11 (15)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD mit A(0|0|1), B(2|6|1), C(−4|8|5) und D(−6|2|5) gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit M bezeichnet.

a) Begründe, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. (1)
b) Weise nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist und bestimme die Koordinaten von M. (3)
c) Bestimme die Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck ABCD liegt. Kontrollergebnis: E: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$. (3)

Solarmodule werden auf einem Gestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird zu einem bestimmten Zeitpunkt modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke beschreiben, der Befestigungspunkt am Gestell durch den Punkt M. (siehe Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Wirklichkeit.



d) Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfe, ob diese Bedingung erfüllt ist. (2).
e) Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, welches im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründe unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens durch den Term $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos(\phi)} \cdot (0{,}8\,\text{m})^2$ berechnet werden kann. (3)

Um die Solarmodule während eines Tages ständig nach der Sonnenstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Trägergestell um die Längsachse im Raum drehen. Die Neigung des Trägergestells zur Horizontalen bleibt dabei unverändert.

f) Berechne den Radius des Kreises, auf dem sich der Punkt A bei der Drehung des Metallrohres bewegt. (2)
g) Begründe ohne Rechnung, dass der in f) ermittelte Radius entsprechend auch für den unteren rechten Eckpunkt B der Modulfläche gilt. (1)

Lösung

a) Die x_3-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein. (1)

b) Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang. (1)

Wegen $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = 0$ ist $\measuredangle DAB = 90°$ und das Parallelogramm ABCD ist rechtwinklig. (1)

Wegen $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist M(−2|4|3) (1)

c) Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte A, B und C in die Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ erhält man die drei Gleichungen

(I) $c = d$
(II) $2a + 6b + c = d$
(III) $-4a + 8b + 5c = d$ (2)

Aus (I) erhält man c = d. Aus (II) = (III) ergibt sich $b = -\frac{1}{5}d$. Einsetzen in (II) führt zu $a = \frac{3}{5}d$.

Mit z.B. d = 5 erhält man E: $3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$. (1)

d) Mit den Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man den Neigungswinkel $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n} * \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}\right) \approx 32{,}31°$. (1)

Die Bedingung ist also erfüllt. (1)

e) Da die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, ist $|\overrightarrow{AB}|$ die Breite des rechteckigen Schattens. (1)

Seine Länge ist $|\overrightarrow{FG}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\varphi)$ (1)

Durch den Faktor $(0{,}8\text{ m})^2$ wird der Maßstab für Länge und Breite berücksichtigt. (1)

f) Die Ecken A und B bewegen sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M‘ eine Einheit oberhalb der x_1x_2-Ebene senkrecht unter dem Befestigungspunkt M(−2|4|3) liegt. M‘ hat also die Koordinaten M‘(−2|4|1). (1)

Der gesuchte Radius ist also $r = 0{,}8 \cdot |\overrightarrow{LA}| = 0{,}8 \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} = 0{,}8 \cdot \sqrt{20} \approx 3{,}6$ m (1)

g) A du B haben den gleichen Abstand zum Befestigungspunkt M auf der Drehachse und liegen in eine Ebene senkrecht zu dieser Drehachse. Daher müssen sie den gleichen Abstand zur Drehachse haben. (1)