7.6. Normalenformen

7.6.1. Normalenform der Ebenengleichung

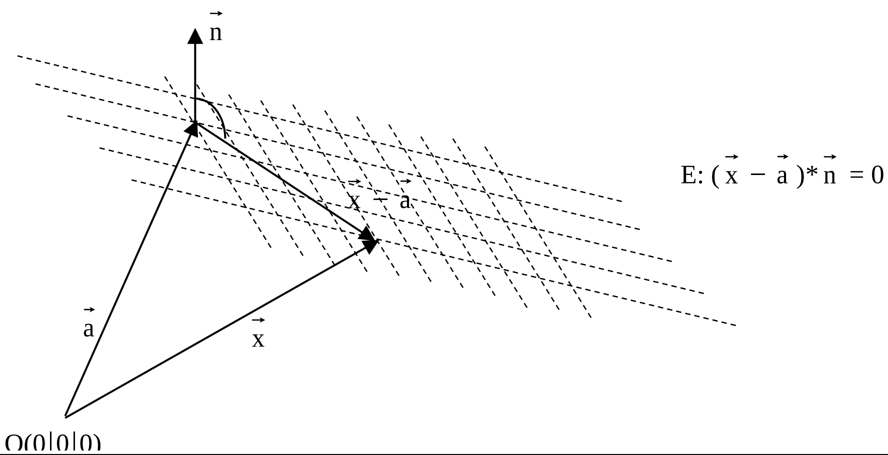
Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich Ebenen und Geraden in der parameterfreien Normalen- oder Koordinatenform darstellen. Die Normalenform ermöglicht einfache und schnelle Berechnungen von Schnittpunkten- und Geraden sowie Abständen und Winkeln.

Beispiel. Aufgaben zu Normalenformen Nr. 1

Definition: Normalen- und Koordinatenform der Ebene

Die Ebene E, die senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ verläuft und durch den Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ geht, besteht aus allen Punkten P mit den Ortsvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, für die gilt E: $(\vec{x} - \vec{a})*\vec{n} = 0$. **(Normalenform der Ebene).**

Durch Ausmultiplizieren erhält man daraus die Gleichung E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit $d = \vec{a}*\vec{n}$. **(Koordinatenform der Ebene)**



Umwandlung Parameterform → Normalenform:

Die Ebene mit der **Parameterform** E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} = 0$ mit r, s $\in \mathbb{R}$ hat die **Normalenform** E: $(\vec{x} - \vec{a})*\vec{n} = 0$.

Der **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ muss zu den beiden **Spannvektoren** $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen

- Berechnung mit dem **Skalarprodukt**: $\vec{b}*\vec{n} = 0$ und $\vec{c}*\vec{n} = 0$ bzw. $\left| \begin{matrix} b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3 & = & 0 \\ c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 & = & 0 \end{matrix} \right|$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen, da die Länge des Normalenvektors nicht festgelegt ist.
- Berechnung mit dem **Vektorprodukt**: $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$. Der Normalenvektor hat dann eine Länge, die der Fläche des von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.

Beispiel:

$\boxed{\text{Parameterform}}$ E: $\vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{c} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Normalenvektor}}$ $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} \times\cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot 1 - 0\cdot 1\\-3\cdot 1 + 2\cdot 1\\3\cdot 0 - 2\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Koordinatenform}}$ E: $(\vec{x} - \vec{a})*\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}*\vec{n} = \vec{a}*\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{-x - y + 2z = -5}$

Beispiel: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 2

Umwandlung Normalenform → Parameterform:
Die Eben mit der Normalenform E: $(\vec{x} - \vec{a})*\vec{n} = 0$ hat die Parameterform E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} = 0$ mit r, s ∈ ℝ. Die Spannvektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ müssen senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ stehen und dürfen nicht parallel sein: $\vec{b} * \vec{n} = 0$ und $\vec{c} * \vec{n} = 0$ mit $\vec{b} \neq t\cdot\vec{c}$ bzw. $\begin{vmatrix}b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3 & = & 0\\ c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 & = & 0\end{vmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}tc_1\\tc_2\\tc_3\end{pmatrix}$

Example:
Bestimme eine Parameterform für E: $x - 3y + 2z = 6$.

Lösung:

Wähle einen Punkt P(x|y|z), dessen Koordinaten der Gleichung erfüllen, z.B. P(6|0|0) ⇒ Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$

Wähle zwei Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkreht zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, d.h. mit $\vec{b}*\vec{n} = \vec{c}*\vec{n} = 0$,

zum Beispiel $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$. Eine mögliche Parameterform ist also E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

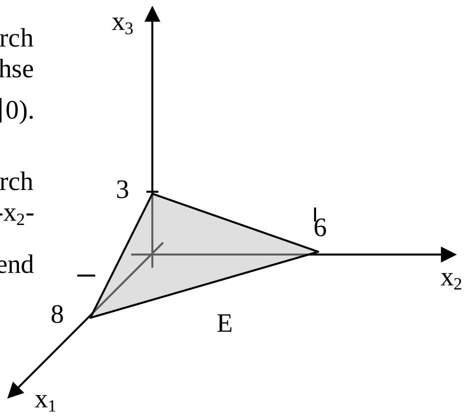
Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 3

Beispiel für die Darstellung einer Ebene im Koordinatensystem mit Hilfe von Spurgeraden
Gegeben ist die Ebene E: $3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 24$. Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen (Spurgeraden). Zeichne einen entsprechenden Ausschnitt der Ebenen in ein Koordinatensystem.

Lösung

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen erhält man durch Nullsetzen der jeweils übrigen Koordinaten: Z.B. ist auf der x_1-Achse $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 4\cdot 0 + 8\cdot 0 = 24 \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow S_1(8|0|0)$. Entsprechend erhält man $S_2(0|6|0)$ und $S_3(0|0|3)$.

Die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen erhält man durch Nullsetzen der jeweils übrigen Koordinate. Z.B. ist auf der x_1-x_2-Ebene $x_3 = 0 \Rightarrow g_{12}$: $3x_1 + 4x_2 = 24 \Leftrightarrow x_2 = 6 - \frac{3}{4}x_1$. Entsprechend erhält man g_{13}: $x_3 = 3 - \frac{3}{8}x_1$ und g_{23}: $x_3 = 3 - \frac{1}{2}x_2$.



Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 4

7.6.2. Lagebeziehungen zwischen Ebenen in Normalenform

Satz: Lagebeziehungen zwischen Ebenen in Normalenform

Die gemeinsamen Punkte $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Ebenen E: $(\vec{x} - \vec{a}) * \vec{n} = 0$ und F: $(\vec{x} - \vec{b}) * \vec{m} = 0$ müssen die Gleichung $\begin{vmatrix} n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 & = & c \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 & = & d \end{vmatrix}$ mit $c = \vec{a} * \vec{n}$ und $d = \vec{b} * \vec{m}$ erfüllen. E und F haben

- **keinen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung **keine** Lösung besitzt. Sie verlaufen dann **parallel** zueinander.
- **eine Schnittgerade** g, wenn die Gleichung Lösungen $(x_1|x_2|x_3)$ besitzt, die von **einem** Parameter abhängen.
- **eine gemeinsame Ebene** E = F, wenn die Gleichung Lösungen $(x_1|x_2|x_3)$ besitzt, die von **zwei** Parametern abhängen. Die Ebenen sind dann **identisch**.

Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 5 - 7

7.6.3. Normalenform der Geradengleichung

Aufgaben zu Normalenformen Nr. 8

Definition: Normalen- und Koordinatenform der Geraden

Die Gerade g, die senkrecht zu den Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ verläuft und durch den Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ geht, besteht aus allen Punkten P mit den Ortsvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, für die gilt

g: $\begin{vmatrix} (\vec{x} - \vec{a}) * \vec{n} & = & 0 \\ (\vec{x} - \vec{a}) * \vec{m} & = & 0 \end{vmatrix}$ **(Normalenform der Gerade).**

Durch Ausmultiplizieren erhält man daraus das LGS g: $\begin{vmatrix} n_1x_1 + n_1x_2 + n_1x_3 & = & c \\ m_2x_1 + m_2x_2 + m_2x_3 & = & d \end{vmatrix}$ mit $c = \vec{a} * \vec{n}$ und $d = \vec{a} * \vec{m}$. **(Koordinatenform der Gerade)**

Bemerkung:

Die Normalenform beschreibt die **Schnittgerade** der beiden Ebenen E: $(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{n}$ und F: $(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{m}$

Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 9

7.6.4. Lagebeziehung zwischen Ebenen und Geraden in Normalenform

Die Frage nach der Struktur der Lösungsmenge eines LGS erhält durch die geometrische Deutung der linearen Gleichungen als Koordinatenformen von Ebenen eine einfache und anschauliche Antwort:

Beispiel: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 10

Satz: **Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen**

Die gemeinsamen Punkte der Geraden g: $\left|\begin{array}{rcl}(\vec{x}-\vec{a_1})*\vec{n_1} & = & 0\\ (\vec{x}-\vec{a_2})*\vec{n_2} & = & 0\end{array}\right|$ und der Ebene E: $(\vec{x} - \vec{a}_3)*\vec{n}_3 = 0$ erhält man aus dem LGS

$$\left|\begin{array}{rcl}n_{1x}x+n_{1y}y+n_{1z}z & = & d_1\\ n_{2x}x+n_{2y}y+n_{2z}z & = & d_2\\ n_{3x}x+n_{3y}y+n_{3z}z & = & d_3\end{array}\right|$$

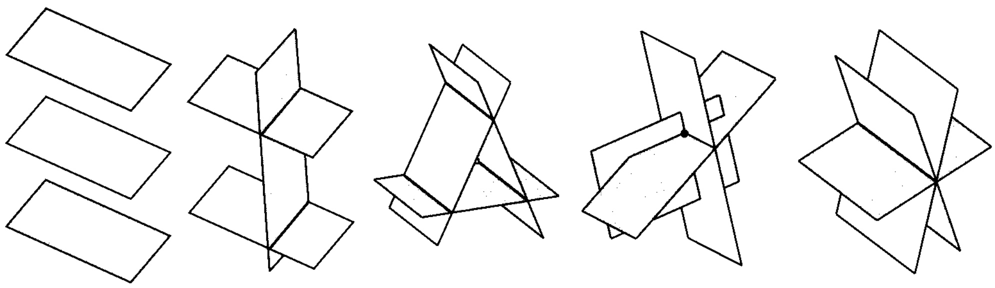
mit $d_i = \vec{a}_i*\vec{n}_i$. g und E haben

- **keinen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung **keine** Lösung besitzt. Sie verlaufen dann **parallel** zueinander.
- einen **Schnittpunkt** P, wenn die Gleichung **eine** Lösung $(x_1|x_2|x_3)$ besitzt. Seine Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen von r bzw. s und t in die Gleichung von g bzw. E.
- eine **gemeinsame Gerade** g ⊂ E, wenn die Gleichung **viele** Lösungen $(x_1|x_2|x_3)$ besitzt. Die Gerade liegt dann **in** der Ebene.

Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 11

Bemerkung:
Ein LGS mit drei Gleichungen für drei Unbekannte beschreibt die **gegenseitige Lage dreier Ebenen**. Es besitzt

- **keine** Lösung, wenn die die drei Ebenen sich nur **paarweise** oder überhaupt nicht schneiden
- **eine** Lösung, wenn die drei Ebenen sich nur in einem **Punkt** treffen
- **viele** Lösungen, wenn die drei Ebenen auf einer gemeinsamen **Achse** liegen:



Übungen: Aufgaben zu Normalenformen Nr. 12