7.7. Aufgaben zu Abständen und Winkeln

Aufgabe 1: Schnittwinkel zwischen Geraden
Bestimmen Sie die Innenwinkel und ihre Summe für das Viereck ABCD. Berechnen Sie auch die Koordinatengleichung der Trägerebene, falls es sich um ein ebenes Viereck handelt.

a) $A(0|0|0)$, $B(1|2|-2)$, $C(-1|5|4)$ und $D(1|4|8)$

b) $A(0|0|0)$, $B(-3|-2|6)$, $C(5|1|11)$ und $D(2|6|3)$

c) $A(0|0|0)$, $B(3|4|5)$, $C(10|5|5)$ und $D(7|1|0)$

Aufgabe 2: Schwerpunkte, Schnittwinkel zwischen Geraden

Eine Pyramide hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(6|0|6)$ und $D(0|6|6)$.
a) Bestimmen Sie alle Kantenlängen.
b) Zeigen Sie, dass sich die Verbindungsgeraden von je einem Schwerpunkt einer Seitenfläche zur gegenüberliegenden Ecke in einem Punkt schneiden.
c) Welchen Winkel schließen je zwei dieser Geraden ein?

Aufgabe 3: Geschwindigkeiten, Schnittwinkel zwischen Geraden

Ein Flugzeug bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn im Steigflug. Von der Bodenstation $B(0|0|0)$ aus wird es zunächst im Punkt $P_1(-1|3|2)$ und 5 Sekunden später im Punkt $P_2(0|4|2{,}5)$ geortet. Die Koordinaten sind in km angegeben.
a) Berechnen Sie die Durchschnittgeschwindigkeit des Flugzeugs
b) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle P_1BP_2$.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3, in dem das Flugzeug die Höhe 4,5 km erreicht.
d) Etwas später lässt sich infolge eines technischen Defektes nur noch die Richtung des Punktes $P_4(1|1{,}8|w)$ anpeilen. Bestimmen Sie die Höhe w in diesem Punkt.
e) Die Sichtweite beträgt 4 km. Wie lange ist das Flugzeug von der Bodenstation aus zu sehen?

Aufgabe 4: Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

Berechnen Sie die Winkel zwischen der Geraden g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ und den Koordinatenachsen sowie den Koordinatenebenen

Aufgabe 5. Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

Gegeben sind die Ebene E durch die Punkte $A(1|0|1)$, $B(2|1|1)$ und $C(1|2|5)$ sowie die Gerade g durch die Punkte $G(4|-1|2)$ und $H(1|1|3)$.
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von E und g.
b) In welchem Winkel schneiden sich g und E?
c) Durch Spiegelung von g an E erhält man die Gerade g'. Geben Sie eine Gleichung für g' an
d) In welchem Winkel schneiden sich g und g'?

Aufgabe 6: Schnittwinkel zwischen Ebenen
Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen E und F:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } F: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} \text{ und } F: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Pyramiden, Schnittwinkel zwischen Ebenen

Gegeben sind die Punkte $A(1|-2|3)$, $B(9|0|-1)$, $C(8|2|-2)$ und $E(6|3|5)$.
a) Geben Sie einen Punkt D an, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Viereckes ABCD.
c) Zeigen Sie, das E von A, B, C und D gleich weit entfernt ist.
d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDE.
e) Berechnen Sie die Winkel α_1 und α_2 zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche der Pyramide.
f) Berechnen Sie den Winkel β zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche der Pyramide.

Aufgabe 8: Abstand Punkt-Ebene
Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E:

a) P(14|6|25) und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) P(4|−5|4) und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9: Abstand Gerade-Ebene
Zeigen Sie, dass die Ebene E: $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 21$ und die Gerade durch die Punkte A(−11|−8|8) und B(−7|−1|22) zueinander parallel sind und berechnen Sie ihren Abstand.

Aufgabe 10: Abstand Ebene-Ebene
Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen E: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zueinander parallel sind und berechnen Sie ihren Abstand.

Aufgabe 11: Pyramide, Abstand Punkt-Ebene
Gegeben sind die Punkte A(2|1|4), B(3|3|7), C(5|0|6) und D(7|4|3).
a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABS gleichseitig ist und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E, die durch A, B und C geht.
c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.
d) Bestimmen Sie den Höhenfußpunkt F der Pyramide und ermitteln sie, ob er außerhalb oder innerhalb des Dreieckes ABC liegt. **Hinweis**: Formulieren Sie den Vektor $\overrightarrow{AF}$ als Linearkombination der beiden Schenkel: $\overrightarrow{AF} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$. Deuten Sie die Werte der Parameter r und s mit Hilfe einer Skizze hinsichtlich der Lage des Punktes F zum Dreieck ABC.

Aufgabe 12: Kegel, Abstand Punkt-Ebene
Gegeben sind die Punkte A(4|0|1), B(0|3|0), C(−2|1|3) und S(3|3|12).
a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von der Ebene E durch die Punkte A, B und C.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten es Lotfußpunktes F von S auf E.
c) Berechnen Sie das Volumen des Kegels, der durch Rotation der Strecke [SC] um die Normale auf E durch S entsteht.

Aufgabe 13: Abstand Punkt-Gerade zweidimensional
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(1|5) von der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14: Abstand Punkt-Gerade
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g, die durch die Punkte A und B geht:
a) P(8|10|0), A(1|−4|0), B(3|2|3)
b) P(−2|5,5|6,5), A(−2|−2|−1), B(4|4|5)
c) P(6|8|10), A(−8|−4|8), B(6|3|−6)

Aufgabe 15: Kegel, Abstand Punkt-Gerade
a) Bestimmen Sie die Koordinaten v und w so, dass die Punkte A(1|0|−1), B(4|v|1) und C(−3,5|−9|w) auf einer gemeinsamen Geraden g liegen.
b) Bestimmen Sie den Normalenfußpunkt des Punktes P(10|12|23) auf der Geraden g.
c) Welchen Abstand hat der Punkt P von der Geraden g?
d) Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes CFP.
e) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation des Dreieckes CFP um die Achse g gebildet wird.

Aufgabe 16: Abstand windschiefer Geraden

Berechnen Sie den gemeinsamen Normalen-Einheitsvektor und den Abstand der Geraden g und f zueinander:

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ und f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}10\\5\\6\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ und f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 17: Geschwindigkeiten, Abstand windschiefer Geraden

Drei Flugzeuge F_1, F_2 und F_3 befinden sich zum Zeitpunkt t = 0 in den Punkten $P_1(0|1|9)$, $P_2(7|2|-6)$ und. $P_3(2|0|1)$. Sie bewegen sich mit den konstanten Geschwindigkeiten $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Ortskoordinaten sind in m, Geschwindigkeitskoordinaten in m/s angegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich F_1 und F_2 in einer Ebene E bewegen und geben Sie ihre Normalenform an.
b) In welchem Punkt S schneiden sich die Bahngeraden von F_1 und F_2?
c) Wie viele Sekunden nach f_1 trifft F_2 in S ein?
d) In welchem Punkt T und unter welchem Winkel α trifft die Bahngerade von F_3 auf die Ebene E?
e) Wie weit ist F_3 nach 2 Sekunden von E entfernt?
f) Nach wie viel Sekunden ist F_3 gleichweit von F_1 und F_2 entfernt?
g) Wie viele Sekunden nach dem Start sind sich F_1 und F_2 am nächsten?
h) Wie nahe kommen Sie sich?

Aufgabe 18: Koordinatensystem, Geschwindigkeiten, Abstand windschiefer Geraden

Ein Drachenflieger startet von einer 1200 m über NN gelegenen Klippe im Punkt P und fliegt geradlinig zu einem 4 km südlich und 5 km östlich gelegenen Punkt Q auf einer Wiese. Die Wiese bildet eine waagrechte Ebene auf der Höhe 200 m über NN.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und skizzieren Sie die Flugbahn.
b) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Flugbahn zur waagrechten.
c) Der Drachenflieger sinkt 4 Meter pro Sekunde. Berechnen Sie die Fluggeschwindigkeit und die Flugdauer.
d) Beim zweiten Start ist die Thermik schlechter, so dass der Drachenflieger nun mit 5 m/s sinkt. In welcher Entfernung von P landet er?
e) Die Wiese gehört zu einem Flugplatz. 5 km nördlich von Q startet ein Flugzeug und nimmt mit 252 km/h direkten Kurs auf den Gipfel des Bösecks, der in 4200 m Höhe über NN 7 km südlich und 6 km westlich von Q liegt. In welchem Abstand passiert es die Flugbahn des Drachenfliegers beim ersten Start?
f) Das Flugzeug startete im gleichen Moment wie der Drachenflieger beim ersten Start. Wie nahe kommt es dem Drachenflieger tatsächlich?

Aufgabe 19: Projektion auf eine Ebene

Gegeben sind die Punkte P(2|3|2), Q(0|4|1) und L(−1|6|5) sowie die Ebene E: $x_3 = -1$. Im Punkt L befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.

a) Wie lang ist die Strecke $\overline{PQ}$?
b) Wie groß ist der Winkel zwischen den Lichtstrahlen durch die Punkte P und Q?
c) Wie lang ist der Schatten $\overline{P'Q'}$, den $\overline{PQ}$ auf E wirft?
d) In welchem Punkt schneidet die Gerade PQ die Gerade P’Q’?
e) Zeichnen Sie die Punkte P, Q, L, P’, Q’ sowie die Ebene E in ein Koordinatensystem und kontrollieren Sie ihre Ergebnisse.

Aufgabe 20: Spiegelung und Reflektion an einer Ebene

Gegeben sind die Punkte A(4|3|0), B(2|3|1), C(6|0|1) und L(8|5,5|6,5).

a) Welchen Abstand hat der Punkt L von der Ebene E durch die Punkte A, B und C?

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes L', den man durch Spiegelung de Punktes L an der Ebene E erhält.

c) Ein Lichtstrahl durch L und B wird an E reflektiert. Überprüfen Sie, ob die Punkte Q(2|14|14) und R(2|−2,5|−5,5) von dem reflektierten Strahl getroffen werden.

d) Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse mit Hilfe einer Zeichnung.

Aufgabe 21: Spiegelung an einer Geraden

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P', der durch Spiegelung des Punkte P(1|2|1) an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht.

Aufgabe 22: Spiegelung an einer Geraden

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g', die durch Spiegelung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der Geraden f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht.

Aufgabe 23: Spiegelung an einem Punkt

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g', die durch Spiegelung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ am Punkt Z(3|2|1) entsteht.

Aufgabe 24: Spiegelung an einem Punkt

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E', die durch Spiegelung der Ebene E: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$ am Punkt Z(−1|3|0) entsteht.

Aufgabe 25: Geschwindigkeiten, Reflektion

Der Partyjet des Sultans von Brunei befindet sich im Anflug auf den Flughafen Hong Kong. Zur Zeit t = 0 befindet er sich 10 km südlich und 11 km östlich der Insel Lantau in 5 km Höhe.
Der irische Pilot hält mit 540 km pro Stunde direkten Kurs auf einen 3 km über Lantau gelegenen Punkt und sinkt dabei 20 Meter pro Sekunde. Sein Whiskyglas ist leer.
Die erste und einzige Maschine der China Airsea Corp., eine günstig gebraucht erstandene B 737, befindet sich zur Zeit t = 0 in 4 km Höhe 20 km östlich und 4 km südlich von Lantau mit 720 km/h auf direktem Westkurs. Der Wahrsager des chinesischen Piloten hat ihn eindringlich vor den Gefahren des heutigen Tages gewarnt.

a) Zeichne die Positionen und die Flugbahnen der beiden Flugzeuge in ein Koordinatensystem im Maßstab 1 : 100 000 (1 cm ≙ 1 km). Wähle Lantau als Koordinatenursprung. Die x_1-Achse zeigt nach Süden, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse nach oben. (3)

b) Wie nahe können sich die beiden Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen? (5)

c) Zur Zeit t = 0 s befindet sich die B 737 20 km westlich von Lantau. Wie nahe kommen sich die beiden Flugzeuge tatsächlich? (4)

d) Der Sultan blickt zur Zeit t = 0 s wohlgefällig hinunter auf seine Yacht, die genau 2 km südlich von Lantau auf der spiegelglatten See liegt. Ein Strahl der genau im Süden unter 45 ° stehenden Sonne wird vom Kabinenfenster der Yacht reflektiert und blendet den Sultan für einen Moment. Um wie viel Grad ist das Kabinenfenster geneigt? (5)

7.7. Lösungen zu den Aufgaben zu Abständen und Winkeln

Aufgabe 1: Schnittwinkel zwischen Geraden

a) $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = \sqrt{21}$, $\overline{DA} = 9$

$\alpha = 105{,}03°$, $\beta = 67{,}71°$, $\gamma = 122{,}00°$ und $\delta = 43{,}33°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 337{,}97°$ $\Rightarrow$ kein ebenes Viereck
Die Trägerebene von ABC E: $18x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0$ enthält D nicht.

b) $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 7\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 7\sqrt{2}$, $\overline{DA} = 7$

$\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$ und $\delta = 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 330°$ $\Rightarrow$ kein ebenes Viereck
Die Trägerebene von ABC E: $4x_1 - 9x_2 - x_3 = 0$ enthält D nicht.

c) $\overline{AB} = \sqrt{50}$, $\overline{BC} = \sqrt{50}$, $\overline{CD} = \sqrt{50}$, $\overline{DA} = \sqrt{50}$

$\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$ und $\delta = 120°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ $\Rightarrow$ ebenes Viereck (Parallelogramm!). Die Trägerebene von ABC E: $x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$ enthält D.

Aufgabe 2: Schwerpunkte, Schnittwinkel zwischen Geraden

a) Alle Seiten haben die Länge $6\sqrt{2}$

b) Die der entsprechenden Ecke gegenüberliegenden Seitenschwerpunkte haben die Koordinaten $S_A(4|4|4)$, $S_B(2|2|4)$, $S_C(2|4|2)$ uns $S_D(4|2|2)$.

c) AS_A: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ schneidet AS_A: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ in S(3|3|3) mit dem Winkel $\alpha \approx 70{,}5°$, BS_B und CS_C gehen ebenfalls durch S.

Aufgabe 3: Geschwindigkeiten, Schnittwinkel zwischen Geraden

a) $\overline{P_1P_2} = 1{,}5$ km und v = 300 m/s b) $\alpha = 15{,}6°$ c) $P_3(4|8|4{,}5)$ d) $P_4(5|9|5)$ e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$

schneidet die Sichtsphäre $4 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ für $r = \frac{4}{3}(1 \pm \sqrt{6})$ bzw. in $P_{5/6}(\frac{1}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{6} \mid \frac{13}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{6} \mid \frac{8}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{6})$

mit $\overline{P_5P_6} = 4\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ $\Delta t = \frac{40}{3}\sqrt{6}$ s $\approx 32{,}6$ s

Aufgabe 4: Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

a) $\alpha_1 \approx 78{,}2°$, $\alpha_2 \approx 42{,}0°$, $\alpha_3 \approx 56{,}1°$.
b) $\alpha_{12} \approx 48{,}0°$; $\alpha_{23} \approx 21{,}8°$, $\alpha_{13} \approx 33{,}8°$

Aufgabe 5: Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

a) E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$, S(1|1|3)

b) $\sin\alpha = \frac{9}{3\sqrt{14}}$ $\Rightarrow$ $\alpha \approx 53{,}3°$

c) g': $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

d) $\cos\beta = -\frac{2}{7}$ $\Rightarrow$ $\beta \approx 106{,}6° = 2\alpha$

Aufgabe 6: Schnittwinkel zwischen Ebenen

a) E: $x_1 + 2x_3 = 3$ und F: $x_1 + x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha \approx 71{,}6°$
b) $E = F = -2x_1 + x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha \approx 0°$

Aufgabe 7: Pyramiden, Schnittwinkel zwischen Ebenen

a) D(0|0|2), ABCD ist sogar ein Rechteck.

b) $A = 6\sqrt{14}$ FE

c) V = 42 VE

d) = 92,85 FE

e) $\alpha_1 = 77{,}69°$, $\alpha_2 \approx 50{,}77°$

f) $\beta \approx 49{,}80°$

Aufgabe 8: Abstand Punkt-Ebene

a) E: $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0 \Rightarrow d = 26$ LE

b) E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ mit $P \in E \Rightarrow d = 0$ LE

Aufgabe 9: Abstand Gerade-Ebene

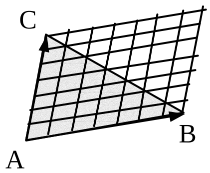
d = 18 LE

Aufgabe 10: Abstand Ebene-Ebene

F: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5$ mit d = 1 LE

Aufgabe 11: Pyramide, Abstand Punkt-Ebene

a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \sqrt{14} \Rightarrow A = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ FE



b) F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $-x_1 - x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow d = 3\sqrt{3}$ LE

c) V = 10,5 VE

d) F(4|1|6) mit $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ F liegt innerhalb des Dreieckes ABC, da $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} < 1$ (siehe Skizze)

Aufgabe 12: Kegel, Abstand Punkt-Ebene

a) E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \Rightarrow d = 9$ LE

b) F(0|−3|6)

c) $r = \sqrt{29}$ LE $\Rightarrow V = 78\pi$ VE

Aufgabe 13: Abstand Punkt-Gerade zweidimensional

$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $d = \frac{6}{\sqrt{5}}$ LE $\approx 2{,}68$ LE

Aufgabe 14: Abstand Punkt-Gerade

a) Normalenfußpunkt F(5|8|6) $\Rightarrow$ d = 7 LE

b) Normalenfußpunkt F(3|3|4) $\Rightarrow d = 2{,}5\sqrt{6}$ LE

c) Normalenfußpunkt F(0|0|0) $\Rightarrow d = 10\sqrt{2}$ LE

Aufgabe 15: Kegel, Abstand Punkt-Gerade

a) v = 6 und w = −4

b) F(10|18|5)

c) $d = 6\sqrt{10}$ LE

d) $A = 94{,}5\sqrt{10}$ FE

e) $V = 3780\pi$ VE

Aufgabe 16: Abstand windschiefer Geraden

a) $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$ und d = $\frac{6}{5}\sqrt{2}$ b) $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ und d = $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ c) $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und d = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 17: Geschwindigkeiten, Abstand windschiefer Geraden

a) E: $11x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 43$

b) S(3|10|6)

c) F_2 trifft 1 s nach F_1 in S ein.

d) S($\frac{98}{25}$|$-\frac{16}{25}$|$-\frac{7}{25}$) und $\alpha \approx 33{,}06°$

e) d = $\frac{11}{5}\cdot\sqrt{6}$ m ≈ 5,39 m

f) nach 3,167 s

g) t = $\frac{25}{7}$ s

h) d_{min} = 2,67 m

Aufgabe 18: Koordinatensystem, Geschwindigkeiten, Abstand windschiefer Geraden

a) Skizze: Ursprung (O(0|0|0) auf 0 m über NN unter P, x_1-Achse in Richtung Süden, x_1-Achse in Richtung Osten, x_3-Achse nach oben, Entfernungen in m, Geschwindigkeiten in m/s, Zeit t in s ⇒ P(0|0|1200) und Q(4000|5000|200)

b) Flugbahn des Drachenfliegers d: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1200\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4000\\5000\\-1000\end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{42}\cdot 1} \approx -0{,}154 \Rightarrow \alpha \approx -8{,}87°$

c) $v_3 = -4$ m/s ⇒ d: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1200\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}16\\20\\-4\end{pmatrix}$ mit t in s und Flugdauer T = $\frac{1000\text{ m}}{4\text{ m/s}}$ = 250 s

d) Flugbahn beim 2. Start d_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1200\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}16\\20\\-5\end{pmatrix}$ mit t in s. Durch Einsetzen der Flugdauer T = $\frac{1000\text{ m}}{5\text{ m/s}}$ = 200 s erhält man den 2. Landepunkt Q_2(3200|4000|200) und $\overline{PQ_2} \approx 806{,}2$ m.

e) Flugbahn des Flugzeugs f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1000\\5000\\200\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}12000\\-6000\\4000\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{42}\cdot 7}\begin{pmatrix}13\\-14\\-42\end{pmatrix}$ und d = $\frac{41000}{\sqrt{42}\cdot 7} \approx 914{,}7$ m

f) v = 252 km/h = 70 m/s = $\sqrt{(6a)^2+(3a)^2+(2a)^2}$ ⇒ a = 10 ⇒ f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1000\\5000\\200\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}60\\-30\\20\end{pmatrix}$ mit t in s

⇒ d(t) = $\sqrt{(1000-44t)^2+(-5000+50t)^2+(1000-25t)^2}$ ⇒ min bei t ≈ 63,0 s und d = 2625,5 m (GTR)

Aufgabe 19: Projektion auf eine Ebene

a) $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{6}$ b) α = 28,13° c) P'(5|0|−1), Q'(0,5|3|−1) ⇒ $\left|\overline{P'Q'}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{13}$ LE d) S(−4|6|−1)

Aufgabe 20: Spiegelung und Reflektion an einer Ebene

a) E: $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \Rightarrow d = \sqrt{61}$

b) Normalenfußpunkt F(5|1,5|0,5) ⇒ Bildpunkt L'(2|−2,5|−5,5)

c) Lichtstrahl s: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\2{,}5\\5{,}5\end{pmatrix}$ mit r > 0 ⇒ reflektierter Lichtstrahl s': $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix}0\\5{,}5\\6{,}5\end{pmatrix}$ mit r' > 0. Für r' = 2 erhält man Q und für r' = −1 erhält man R ⇒ Q ∈ s' und R ∉ s'.

Aufgabe 21: Spiegelung an einer Geraden

Hilfsebene E: $-x_1 + x_3 = 0$ ⇒ Lotfußpunkt L(1|1|1) ⇒ P'(1|0|1)

Aufgabe 22: Spiegelung an einer Geraden

Spiegelung des Punktes P(1|1|1) ∈ g an f: Hilfsebene E: $x_2 + x_3 = 2$ ⇒ Lotfußpunkt $L_P(2|\frac{5}{2}|-\frac{1}{2})$ ⇒ P'(3|4|−2)

Spiegelung des Punktes Q(0|1|2) ∈ g an f: Hilfsebene E: $x_2 + x_3 = 3$ ⇒ Lotfußpunkt $L_Q(2|3|0)$ ⇒ Q'(4|5|−2)

Die gespiegelte Gerade geht durch P' und Q', also g': $\vec{x} = \overrightarrow{OP'} + t\,\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit t ∈ ℝ.

Aufgabe 23: Spiegelung an einem Punkt

Spiegelung von P(1|1|1) ∈ g an Z ergibt P'(5|3|1). Spiegelung von Q(0|1|2) ∈ g an Z ergibt Q'(6|3|0). Die gespiegelte Gerade geht durch P' und Q', also g': $\vec{x} = \overrightarrow{OP'} + t\,\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit t ∈ ℝ.

Aufgabe 24: Spiegelung an einem Punkt

Spiegelung von P(5|0|0) ∈ E an Z ergibt P'(−7|6|1). Spiegelung von Q(2|0|1) ∈ E an Z ergibt Q'(−4|6|−1). Spiegelung von R(0|−1|1) ∈ E an Z ergibt R'(−2|7|−1). Die gespiegelte Ebene geht durch P', Q' und R', also E': $\vec{x} = \overrightarrow{OP'} + r\,\overrightarrow{P'Q'} + s\,\overrightarrow{P'R'} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit r, s ∈ ℝ.

Aufgabe 25: Geschwindigkeiten, Reflektion

a) Zeichnung (3)

b) Ursprung O(0|0|0) in Lantau, Weg in m, Zeit in s, Geschwindigkeiten in m/s

⇒ 540 km/h = 150 m/s = $v \cdot \sqrt{10^2 + 11^2 + 20^2} = v \cdot 15$ ⇒ v = 10 ⇒ Partyjet g: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 11000 \\ 5000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ -110 \\ -20 \end{pmatrix}$

und B 737 h: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 4000 \\ 20000 \\ 4000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ gemeinsamer Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

⇒ Abstand $d = \left| \frac{1}{\sqrt{26}} \left[\begin{pmatrix} 10000 \\ 11000 \\ 5000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4000 \\ 0 \\ 4000 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1000}{\sqrt{26}} \approx 196{,}1$ m. (5)

c) $d(t) = \sqrt{\left(\vec{y} - \vec{x}\right)^2} = \sqrt{(6000 - 100 \cdot t)^2 + (9000 - 90 \cdot t)^2 + (1000 - 20 \cdot t)^2}$ (3)

⇒ (GTR) Minimum zur Zeit t = 77,3 s mit Abstand d = 2732,2 m (1)

d) Die Yacht liegt in P(2000|0|0), der Partyjet ist in Q(10000|−11000|5000) (1)

⇒ gespiegelter Sonnenstrahl g': $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$ (1)

Der Neigungswinkel des eintreffenden Sonnenstrahls zur Senkrechten ist $\alpha_1 = 45$ °. (1)
Der Neigungswinkel des gespiegelten Sonnenstrahls zur Senkrechten ist

$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{210} \cdot 1} \right) \approx \cos^{-1}(0{,}345) \approx 69{,}8°$ (1)

Wegen Einfallswinkel = Ausfallwinkel ist dann der Neigungswinkel der Normalen des Kabinendaches zur Senkrechten $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ = 57,4° = Neigungswinkel des Kabinendaches zur Waagrechten (1)