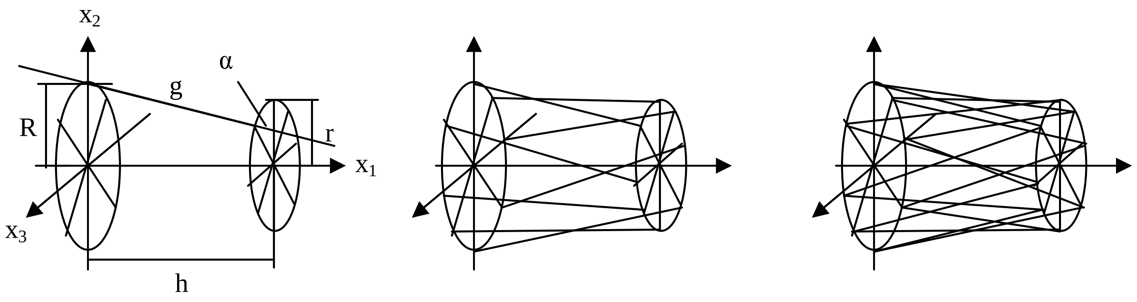
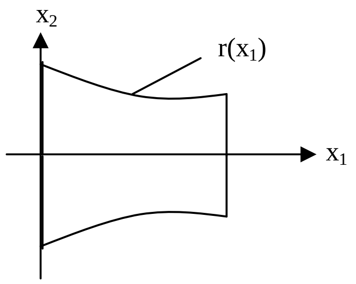
7.7. Aufgaben zu Hyperboloiden

Speichenräder, Schiffsmasten, Kühl- und Wassertürme werden auf die gleiche Art konstruiert. Dazu bringt man zwei Ringe mit den Radien R und r auf einer gemeinsamen Achse im Abstand h voneinander an und verbindet sie mit Speichen, die gegeneinander um den Winkel α verdrillt sind:





Schneidet man den so konstruierten Rotationskörper mit der Zeichenebene (x_1-x_2-Ebene), so erhält man eine konkave Begrenzungskurve für die Schnittfigur. Diese **Mantellinie r(x)** lässt sich als **gedrehte Hyperbel** beschreiben:
Durch Rotation der hyperbelartigen Mantellinie um die x_1-Achse erhält man wieder den ursprünglichen Rotationskörper. Dieser wird daher **Hyperboloid** genannt.

Aufgabe 1: Geometrische Konstruktion im Raum für feste Abmessungen
Ein Kühlturm soll mit R = 20 m, r = 15 m , h = 100 m und α = 45° konstruiert werden.

a) Formuliere die Parameterform der Geraden g, auf der die erste Speiche (siehe Abbildung oben) liegt.
b) Berechne den Abstand d der Speichen von der x_1-Achse.
c) G_t sei ein beliebiger Punkt auf der (unendlich langen) Geraden g: $\overrightarrow{OG_t} = \vec{x}_t = \vec{a} + t\vec{b}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Für welche Werte des Parameters t liegt G_t tatsächlich auf der ersten Speiche?
d) Zeige, dass der Lotfußpunkt des Punktes G_t auf die x_1-Achse die Koordinaten $L_t(t\cdot 100|0|0)$ hat.
e) Zeige, dass für den Abstand des Punktes G_t von der x_1-Achse gilt: $r(t) \approx \sqrt{200,7t^2 - 375,7t + 400}$.
f) Zeige, dass für den Radius des Kühlturmes auf der Höhe x gilt: $r(x) \approx \sqrt{0,02x^2 - 3,76x + 400}$.
g) Auf welcher Höhe x_1 ist der Kühlturm am schmalsten?
h) Berechne den Radius an der schmalsten Stelle des Kühlturms und vergleiche mit b)
i) Vergleiche den Rechenaufwand für die Abstandsberechnungen in b) und f) - h). Welche Zusatzinformationen über den Abstand erhält man in f) -h)?
j) Berechne das Volumen des Kühlturms und das benötigte Betonvolumen für eine Wandstärke von 1 m.

Aufgabe 2: Geometrische Konstruktion im Raum für beliebige Abmessungen

a) Zeige, dass die erste Speiche auf der Geraden g: $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} h \\ r\cdot\cos\alpha - R \\ r\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$ liegt.

b) Zeige, dass die Speichen den Abstand $d = \dfrac{rR\sin\alpha}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2}}$ von der x_1-Achse besitzen.
Hinweis: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

c) G_t sei der Endpunkt des Ortsvektors $\vec{x}_t = \overrightarrow{OG_t}$ auf der Geraden g. Zeige, dass der Lotfußpunkt des Punktes G_t auf die x_1-Achse die Koordinaten $L_t(t\cdot h|0|0)$ hat.

d) Zeige, dass der Abstand des Punktes G_t von der x_1-Achse den Wert
$r(t) = \sqrt{t^2(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2) + t(2rR\cos\alpha - 2R^2) + R^2}$ besitzt.
Hinweis: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

e) Zeige, dass der Radius des Hyperboloids auf der Höhe x durch die Gleichung

$r(x_1) = \sqrt{\frac{x^2}{h^2}(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2) + \frac{x}{h}(2rR\cos\alpha - 2R^2) + R^2}$ mit $0 \leq x \leq h$ gegeben ist.

f) Zeige, dass der Radius r(x) für $x_0 = \frac{hR^2 - hrR\cos\alpha}{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2}$ minimal wird.

g) Zeige, dass $r(x_0) = \frac{rR\sin\alpha}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2}}$ = d. **Hinweis**: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Aufgabe 3: Drehung und Streckung von Hyperbeln

a) Zeige durch Eliminierung des Parameters t, dass die Ortsvektoren $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Hyperbel beschreiben.

b) Zeige anhand einer Zeichnung, dass die Ortsvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ durch Multiplikation von rechts mit der Drehmatrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um die x_3-Achse gedreht werden.

c) Zeige mit Hilfe der Ergebnisse aus a) und b), dass die Ortsvektoren $\vec{y}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} t - \frac{1}{t} \\ t + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine um 45° gegen den Uhrzeigersinn um die x_3-Achse gedrehte Hyperbel beschreiben.

d) Zeige durch Eliminierung des Parameters t, dass die gedreht Hyperbel aus c) durch die Gleichung $y = x + \frac{2}{x \pm \sqrt{x^2 + 2}}$ beschrieben wird. Welche Bedeutung hat die Vorzeichenalternative ± im Nenner?

e) Zeige durch Rationalmachen des Nenners, dass sich die Formel aus d) vereinfachen lässt auf die Gestalt $y = \pm\sqrt{x^2 + 2}$.

f) Zeige anhand von $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$ dass $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ für $x \to \pm\infty$ die Asymptoten $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ besitzt. **Hinweis**: Erweitere und nutze die 3. binomische Formel gemäß $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

g) Zeige, dass das Schaubild der Funktion $r(x) = \sqrt{0{,}02x^2 - 3{,}76x + 400}$ durch Verschiebung um $x_0 = 94$ in x_1-Richtung und Stauchung um a = 0,4 in x_2-Richtung aus der gedrehten Hyperbel $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ hervorgeht:. **Hinweis**: Bringe die Funktionsvorschrift mit Hilfe quadratischer Ergänzung auf die Form $r(x) = \pm\sqrt{a^2 \cdot (x - x_0)^2 + y_0}$.

h) Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptoten von r(x) für $|x - x_0| \to \infty$.

7.7. Lösungen zu den Aufgaben zu Hyperboloiden

Aufgabe 1: Geometrische Konstruktion im Raum für feste Abmessungen

a) Die Gerade g durch die Punkte P(0|20|0) und Q(100| $\frac{15}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{15}{2}\sqrt{2}$) (Pythagoras!) hat die Gleichung g: $\vec{x}_t$

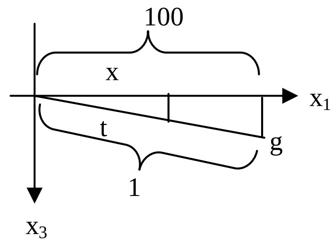
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 100 \\ \frac{15}{2}\sqrt{2}-20 \\ \frac{15}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 100 \\ -9,39 \\ 10,61 \end{pmatrix}$$.(alle Angaben in m)

b) Der gemeinsame Normalenvektor der Geraden g und der x_1-Achse ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{2}\sqrt{2} \\ 20-\frac{15}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ihr Abstand ist

also d = $\frac{\overrightarrow{OP} * \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{25-12\sqrt{2}}} \approx 14{,}97$ m.

c) $0 \le t \le 1$

d) $\overrightarrow{G_tL_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{15}{2}\sqrt{2}-20\right)\cdot t+20 \\ \frac{15}{2}\sqrt{2}\cdot t \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur x_1-Achse.



e) $r(t) = \left|\overrightarrow{G_tL_t}\right| = \sqrt{(625-300\sqrt{2})t^2-(800-300\sqrt{2})t+400}$.

f) Durch Projektion auf die x_1-x_3-Ebene ergibt sich mit dem Strahlensatz x = x_1 = t·100 und durch Einsetzen in e) erhält man $r(x) = \sqrt{\frac{625-300\sqrt{2}}{10000}\cdot x^2-(8-3\sqrt{2})\cdot x+400}$.

g) $r'(x) \approx \frac{0,04x-3,76}{2\sqrt{0,02x^2-3,76x+400}}$ = 0 für x = 94 m. Da es sich um die einzige Nullstelle von r' handelt, besitzt r also höchstens einen Extrempunkt. Da r(x) → + ∞ für x → − ∞ und für x → + ∞, muß es sich um ein relatives und absolutes Minimum handeln.

h) Einsetzen liefert r(94 m) = 14,94 m ≈ d

i) b) liefert nur den minimalen Abstand der Punkte G_t zur x-Achse, d.h. den minimale Radius des Kühlturms. f) - h) liefern den Radius in Abhängigkeit von der Hohe x und womit nicht nur der minimale Radius sondern auch die zugehörige Höhe berechnet werden kann.

j) Geamtvolumen $V = \pi\cdot\int_0^{100}(r(x))^2\,dx \approx 87545{,}72\ m^3$

Mantelvolumen $V_M \approx \pi\cdot\int_0^{100}(r(x))^2-(r(x)-1)^2\,dx = \int_0^{100}(2r(x)-1)dx \approx 10129{,}42\ m^3$.

Aufgabe 2: Geometrische Konstruktion im Raum für beliebige Abmessungen

a) Der gemeinsame Normalenvektor der Geraden g und der x_1-Achse ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\alpha \\ R - r\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ihr Abstand ist also $d = \dfrac{\overrightarrow{OP} * \vec{n}}{|\vec{n}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\alpha \\ R - r\cos\alpha \end{pmatrix}}{\sqrt{r^2(\sin\alpha)^2 + (R - r\cos\alpha)^2}} = \dfrac{rR\sin\alpha}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2}}$

b) $\overrightarrow{G_tL_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ t\cdot r\cdot\cos\alpha + (1-t)\cdot R \\ t\cdot r\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur x_1-Achse.

c) Durch Ausklammern von t^2 und t sowie Einsetzen von $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ erhält man $r(t) = \left|\overrightarrow{G_tL_t}\right| =$
$\sqrt{\left(t\cdot r\cdot\cos\alpha + (1-t)\cdot R\right)^2 + \left(t\cdot r\cdot\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{t^2(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2) + t(2rR\cos\alpha - 2R^2) + R^2}$.

d) Durch Projektion auf die x_1-x_3-Ebene und mit dem Strahlesatz erhält man wie in Aufgabe 1 f) $x = x_1 = t\cdot h$.

e) $r'(x) = \dfrac{\frac{2x}{h^2}(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2) + \frac{1}{h}(2rR\cos\alpha - 2R^2)}{2\sqrt{\frac{x^2}{h^2}(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2) + \frac{x}{h}(2rR\cos\alpha - 2R^2) + R^2}}$ mit $r'(x_0) = 0$ für

$x_0 = \dfrac{R^2 - rR\cos\alpha}{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2}$. Da es sich um die einzige Nullstelle von r' handelt, besitzt r also höchstens einen Extrempunkt. Da $r(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$, muß es sich um ein relatives und absolutes Minimum handeln.

f) Einsetzen.

Aufgabe 3: Drehung und Streckung von Hyperbeln

a) klar
b) klar
c) klar
d) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{1}{t}) \Leftrightarrow t^2 - \sqrt{2}\,xt - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm \sqrt{x^2+2})$. Einsetzen in $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \frac{1}{t}) = \frac{t^2+1}{\sqrt{2}\cdot t}$

ergibt $y = \dfrac{x^2 \pm x\cdot\sqrt{x^2+2} + 2}{x \pm \sqrt{x^2+2}} = x + \dfrac{2}{x \pm \sqrt{x^2+2}}$

e) klar
f) klar
g) klar
h) $g(x) = a\cdot|x - x_0| = 0{,}4\cdot|x - 94|$