

7.7. Abituraufgaben analytische Geometrie abstrakt

Aufgabe 1 (13)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|-1|0)$ und $B(4|3|2)$.

- Berechnen Sie den Abstand \overline{AB} und die Koordinaten des Mittelpunktes M zwischen A und B . (2)
- A wird durch Spiegelung an der Ebene E auf B abgebildet. Geben Sie die Gleichung der Ebene E an. (Lösung: $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$) (1)
- Bestimmen Sie die Spurpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E und zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ sowie die Punkte A und B in ein Koordinatensystem. (2,5)
- Geben Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte S_2 und B an. (1)
- Berechnen Sie den Winkel, den die Gerade g mit der Ebene E einschließt. (1)
- Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren $\overline{BS_1}$ und $\overline{BS_2}$ einschließen. (1,5)
- Geben Sie die Gleichung der Ebene durch S_1, S_2 und B in Normalenform an (Lösung: $F: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$) (3)
- Berechnen Sie den Winkel, den die beiden Ebenen E und F einschließen. (1)

Lösung

a) $\overline{AB} = \sqrt{56}$ und $M(1|1|1)$ (2)

b) $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E = 0$ mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_E = \overline{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ (1)

c) $S_1(2|0|0), S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|6)$ mit Zeichnung (2,5)

d) $g: \vec{x} = \overline{OS_2} + r \cdot \overline{S_2B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ (1)

e) $\sphericalangle(E; g) = \sin^{-1} \left(\frac{|\overline{n}_E * \overline{S_2B}|}{|\overline{n}_E| \cdot |\overline{S_2B}|} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{20}} \right) = \sin^{-1}(\sqrt{0,7}) \approx 56,79^\circ$ (1)

f) $\sphericalangle(S_1BS_2) = \cos^{-1} \left(\frac{|\overline{BS_1} * \overline{BS_2}|}{|\overline{BS_1}| \cdot |\overline{BS_2}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{12}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{17}} \right) \approx 49,90^\circ$ (1,5)

g) $F: \vec{x} = \overline{OS_2} + s \cdot \overline{S_2B} + t \cdot \overline{S_2S_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ mit Normalenvektor $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$F: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$ (3)

h) $\sphericalangle(E; F) = \cos^{-1} \left(\frac{|\overline{n}_E * \overline{n}_F|}{|\overline{n}_E| \cdot |\overline{n}_F|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{7}{\sqrt{14} \cdot 7} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \right) \approx 74,50^\circ$ (1)

Aufgabe 2 (9)

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und für jede reelle Zahl a die Gerade $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

- Begründen Sie, dass g zu keiner Geraden h_a parallel ist.
Für welche reelle Zahl a schneidet h_a die Gerade g ?
Alle Geraden h_a liegen in einer Ebene H .
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von H . (5 VP)
- Für welchen Wert von a ist der Abstand der Geraden g und h_a am größten? (4 VP)

Lösung

a) Die Richtungsvektoren wären parallel, wenn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow u = 0,5 \text{ und } u = -2 \Rightarrow \text{Widerspruch.} \quad (1)$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \text{ hat eine Lösung für } a = \frac{5}{3} \quad (2)$$

H: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{H: } x_1 + 2x_2 = -1 \quad (2)$

b) Abstand $d(a) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{5a^2 + 25}} = \frac{-3a + 5}{\sqrt{5a^2 + 25}}$ ist maximal für $a = -3$. (GTR) (4)

Aufgabe 2 (17)

Gegeben sind die Punkte $P_t(3t|4t|-1)$ und $Q_t(3t+1|4t-1|5t^2+1)$ für $t \in \mathbb{R}$.

- a) Die Punkte P_t liegen auf einer gemeinsamen Geraden g . Geben Sie eine Gleichung für g an.
Die Punkte Q_t liegen in einer gemeinsamen Ebene E . Geben Sie eine Gleichung für E an.
Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zu Ebene E verläuft und berechnen Sie den Abstand zwischen g und E . (5 VP)
- b) Berechnen Sie den minimalen Abstand, den die Punkte P_t und Q_t voneinander haben können. Für welches t wird dieser Abstand erreicht? (3 VP)
- c) Die Punkte Q_{-2} , Q_t und Q_2 bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit vom Parameter t . Für welches t ist das Dreieck gleichschenkelig? Wie groß ist dann der Basiswinkel? (9 VP)

Lösung

a) Die Gerade g wird durch zwei beliebig gewählte Punkte, z.B. $P_0(0|0|-1)$ und $P_1(3|4|-1)$ festgelegt: $g: \vec{x} = \overline{OP_0} + t \cdot \overline{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Die Ebene E wird durch drei beliebig gewählte Punkte, z.B. $Q_{-1}(-2|-5|6)$, $Q_0(1|-1|1)$ und $Q_1(4|3|6)$

festgelegt: $E: \vec{x} = \overline{OQ_0} + r \cdot \overline{Q_0Q_{-1}} + s \cdot \overline{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Ein Normaleneinheitsvektor von E ist $\vec{n}_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\vec{n}_0 \cdot \overline{P_0P_1} = 0$ ist $g \parallel E$. (2 VP)

Der Abstand zwischen E und g ist $d = \vec{n}_0 \cdot \overline{P_0Q_0} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7}{5}$ LE. (1 VP)

b) Der gesuchte Abstand ist $|\overline{P_tQ_t}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5t^2+2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25t^4 + 20t^2 + 6}$ LE. (2 VP)

Er ist minimal für $t = 0$ mit $|\overline{P_0Q_0}| = \sqrt{6}$ LE. (1 VP)

c) Als Grundseite wählt man $Q_{-2}Q_2$ mit der Länge $g = |\overline{Q_{-2}Q_2}| = 4 \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} = 20$ LE. (1 VP)

Die Gerade durch Q_{-2} und Q_2 ist h: $\vec{x} = \overline{OQ_{-2}} + t \cdot \overline{Q_{-2}Q_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Die Hilfsebene senkrecht zu h durch Q_t ist E: $(\vec{x} - \overline{OQ_t}) \cdot \overline{Q_{-2}Q_2} = 0 \Leftrightarrow$

E: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 4t-1 \\ 5t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow E: 3x_1 + 4x_2 = 25t - 1$. (1 VP)

Der Lotfusspunkt $L = h \cap E$ ergibt sich durch Einsetzen von h in E:

$$3 \cdot (-5 + 12r) + 4 \cdot (-9 + 16r) = 25t - 1 \Leftrightarrow -15 + 36r - 36 + 64r = 25t - 1 \Leftrightarrow 100r = 25t - 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\overline{OL} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 4t-1 \\ 21 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ VP})$$

Die Höhe ist dann LQ_t mit der Länge $h = |\overline{LQ_t}| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 5t^2 - 20 \end{vmatrix} = 5 |t^2 - 4|$ LE. (1 VP)

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $A_t = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 50 |t^2 - 4|$ FE. (1 VP)

Das Dreieck ist gleichschenkelig, wenn der Lotfusspunkt $L(3t+1|4t-1|21)$ genau in der Mitte zwischen $Q_{-2}(-5|-9|21)$ und $Q_2(7|7|21)$ liegt, d.h. für $3t+1=1$ und $4t-1=-1 \Leftrightarrow t=0$. (1 VP)

Der Basiswinkel ist dann $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{|\overline{Q_2Q_0} \cdot \overline{Q_2Q_{-2}}|}{|\overline{Q_2Q_0}| \cdot |\overline{Q_2Q_{-2}}|} \right) = \cos^{-1} \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{500} \cdot \sqrt{300}} = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{15}} \approx 58,9^\circ$ (1 VP)

Alternative mit Vektorprodukt:

$$A = \frac{1}{2} |\overline{Q_{-2}Q_t} \times \overline{Q_{-2}Q_2}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 3t+6 \\ 4t+8 \\ 5t^2-20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -80t^2+320 \\ 60t^2-240 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{80^2(t^2-4)^2 + 60^2(t^2-4)^2} = 50|t^2-4|$$

Das Dreieck ist gleichschenkelig, wenn $|\overline{Q_{-2}Q_t}| = |\overline{Q_2Q_t}| \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3t+6 \\ 4t+8 \\ 5t^2-20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3t-6 \\ 4t-8 \\ 5t^2-20 \end{vmatrix} \Leftrightarrow t=0$