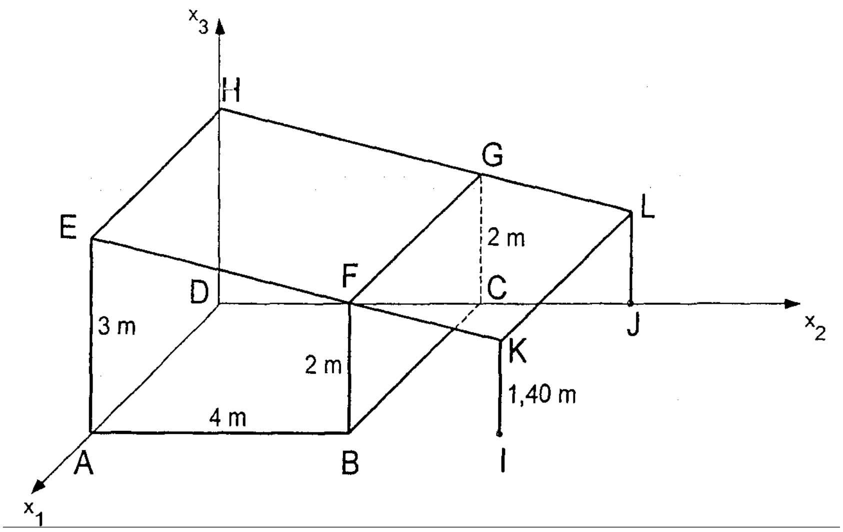
7.7. Abituraufgaben analytische Geometrie konkret

Aufgabe 1 (15)



Ein Geräteschuppen ABCDEFGH mit einer quadratischen Grundfläche hat die in der Zeichnung angegebenen Abmessungen. Der Dachvorsprung FKLG endet in einer Höhe von 1,40 m über dem Boden. Die Punkte E, F, G, H, K und L liegen in einer Ebene E_1. Die Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche. Alle Koordinatenangaben sind in Meter.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte F, G und K an. (1,5)
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1. (1,5)
Welchen Neigungswinkel gegen die Horizontale hat E_1 ? (1)
Welchen Rauminhalt hat der Schuppen? (1)

b) An der Seitenwand ABFE ist eine 4,5 m lange Fahnenstange angebracht. Sie ist im Mittelpunkt der Seite AB verankert und um 10° gegen die Vertikale zu F hin geneigt. Wie viel Prozent der Fahnenstange ragen über das Dach hinaus? (5)

c) Zwischen den Punkten P (15|−4|6,1) und Q (−3|2|4,6) zweier Strommasten ist ein geradlinig verlaufendes Kabel gespannt. Zeigen Sie, dass das Kabel das Dach überquert. (2)
Aus Sicherheitsgründen darf keiner der Dachpunkte weniger als 2 m Abstand vom Kabel haben. Untersuchen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt ist. (3)

Lösungen

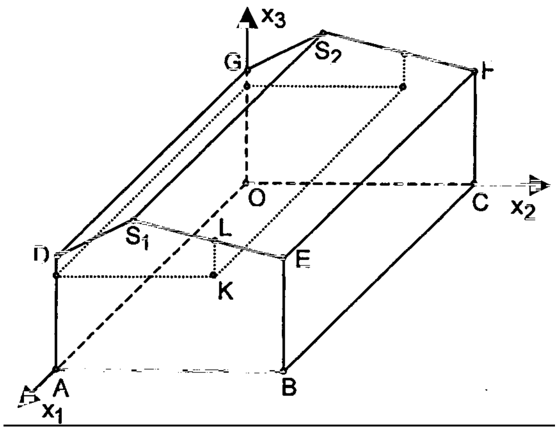
a) F(4|4|2), G(0|4|2) und K(4|6,4|1,4) (Z.B. mit Strahlensatz) (1,5)
E_1: $x_2 + 4x_3 = 12$ (1,5)
Neigungswinkel $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{4}) \approx 14{,}03°$ (1)
$V = 4\text{ m}\cdot 2{,}5\text{ m}\cdot 4\text{ m} = 40\text{ m}^3$ (1)

b) Projektionen auf die x_2-x_3-Ebene: Fahnenstange: $f(x_2) = \tan(80°)\cdot(x_2 - 2) \approx 5{,}67x_2 - 11{,}34$ und
Dachkante: $d(x_2) = -\,0{,}25x_2 + 3$ (1)
$f(x_2) = d(x_2) \Leftrightarrow 5{,}67x_2 - 11{,}34 = -\,0{,}25x_2 + 3 \Rightarrow$ Durchstoßpunkt L(2,42|2,39) (1)
Die herausragende Länge $4{,}5\text{ m} - \sqrt{(2{,}42-2)^2 + (2{,}39-0)^2} \approx 4{,}5\text{ m} - 2{,}43\text{ m} = 2{,}07\text{ m} \triangleq 46\ \%$ (3)

c) Das Kabel k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zur Ebene E_1

im Abstand $d = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) * \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{17}} = \frac{8{,}4}{\sqrt{17}} \approx 2{,}037\text{ m}$ (5)

Aufgabe 2 (17)



Die nebenstehende Figur zeigt das Schrägbild einer 50 m langen und 30 m breiten Lagerhalle, deren Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt. Entsprechende Gebäudekanten sind parallel Die Dachkanten EF und DG befinden sich in 15 m Höhe. Die vordere Giebelspitze ist $S_1(50|10|20)$ (Angaben in Meter).

a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Dachkanten S_1D und S_1E? (3)

b) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche EFS_1S_2 gegen die Grundfläche. (3)

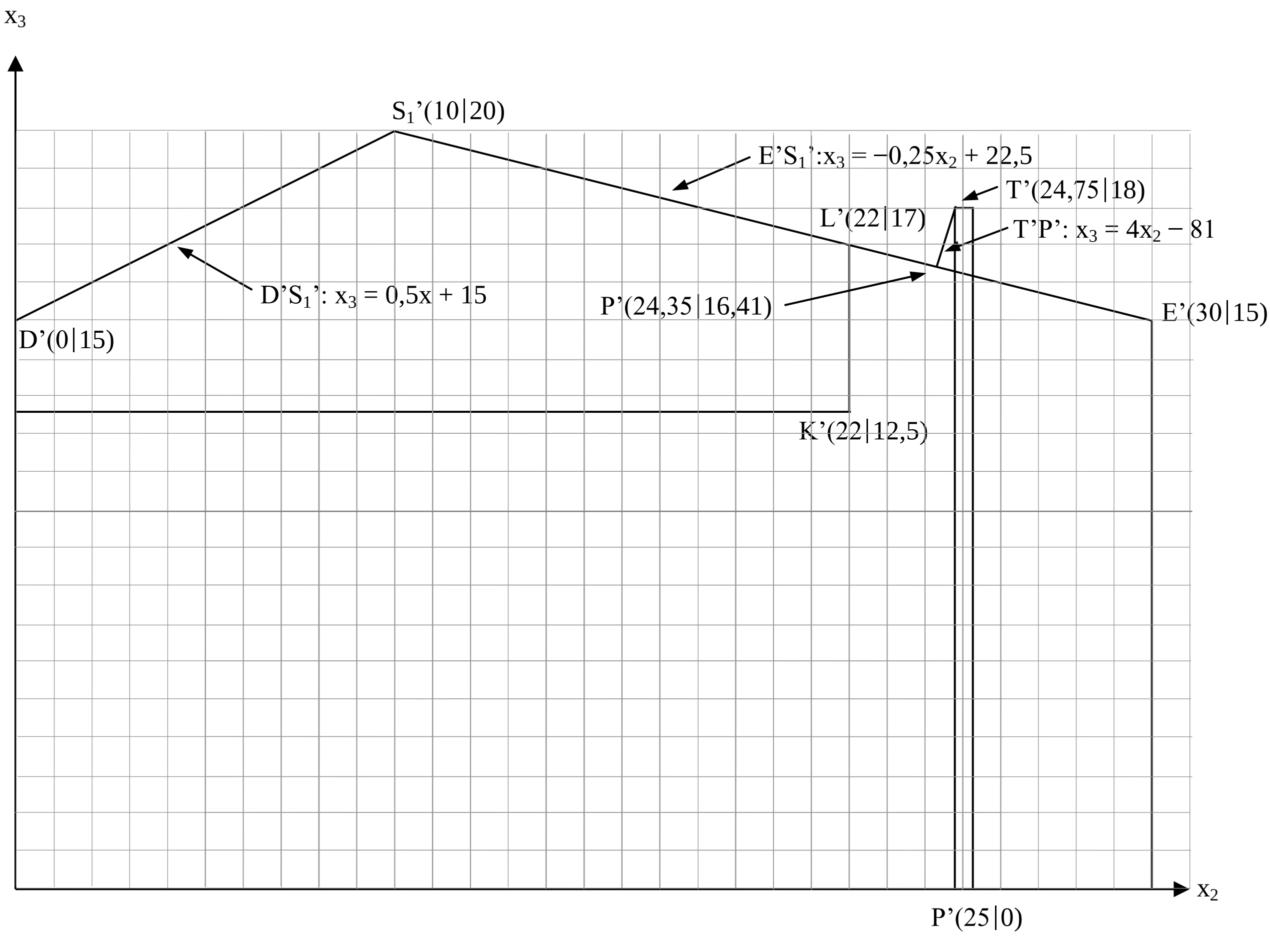
c) Im Zuge von Umbauarbeiten wird die Heizungsanlage saniert und ein neuer, zur Grundfläche orthogonaler, zylinderförmiger Edelstahlkamin eingebaut. Der Fußpunkt der Mittelachse des Kamins ist $P(10|25|0)$. Der Punkt $T(10|24{,}75|18)$ liegt auf der Außenwand des Kamins. Geben Sie den Durchmesser des Kamins an. (1)

d) Im Punkt T ist eine Strebe angebracht, die den Kamin an der Dachfläche EFS_1S_2 befestigt. Sie verläuft senkrecht zu dieser Dachfläche. Berechnen Sie die Länge der Strebe. (5)

e) In 12,5 m Höhe wird parallel zur Grundfläche eine Zwischendecke eingezogen (vgl. Skizze). Wie breit ist diese Zwischendecke, wenn die Punkte K und L den Abstand 4,5 m haben ? (5)

Lösungen

Da alle Strecken parallel zur x_2-x_3-Ebene sind, genügt es, diese beiden Koordinaten zu betrachten bzw. alle Punkte auf die x_2x_3-Ebene zu projizieren. Zeichnung im Maßstab 1 : 200, d.h. 1 Kästchen entspricht 1 m:



a) Steigungswinkel der Dachkante DS_1: $\alpha = \tan^{-1}(0{,}5) \approx 26{,}57°$ (1)
Steigungswinkel der Dachkante ES_1: $\beta = \tan^{-1}(-0{,}25) \approx -14{,}03°$ (1)
$\Rightarrow$ Schnittwinkel der Dachkanten: $\gamma = \alpha - \beta \approx 40{,}6°$ (1)

b) Neigungswinkel der Dachfläche EFS_2S_1 = Steigungswinkel der Dachkante ES_1 = 14,03° (3)

c) Durchmesser des Kamins d = 0,5 m (siehe Zeichnung) (1)

d) Die Strebe verläuft senkrecht zur Dachkante ($\Rightarrow$ Steigung 4) durch den Punkt T'(24,75|18) ($\Rightarrow$ x_3-Achsenabschnitt −81). Ihre Projektion auf die x_2-x_3-Achse hat also die Gleichung T'P': $x_3 = 4x_2 - 81$ (2)

Die Projektion der Dachfläche $EFS_{12}S_2$ auf die x_2-x_3-Ebene verläuft durch die Punkte E'(30|15) und S_1'(10|20) und hat daher die Gleichung $E'S_1'$: $x_3 = -0{,}25x_2 + 22{,}5$ (2)

Die Projektion des Lotfußpunktes P' ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden $E'S_1'$ und T'P' durch Gleichsetzen: $4x_2 - 81 = -0{,}25x_2 + 22{,}5 \Rightarrow x_2 = \frac{103{,}5}{4{,}25} \approx 24{,}35$ und $x_3 \approx 4 \cdot 24{,}35 - 81 \approx 16{,}41 \Rightarrow$ P'(24,35|16,41). (2)

Die Länge der Strebe ist also nach Pythagoras $d = \sqrt{(24{,}75-24{,}35)^2+(18-16{,}41)^2} \approx 1{,}65$ m (1)

e) Der Punkt L liegt $x_3 = 12{,}5 + 4{,}5 = 17$ m hoch. Der zugehörige x_2-Wert ergibt sich durch Einsetzen in $E'S_1'$: $17 = -0{,}25x_2 + 22{,}5 \Leftrightarrow -5{,}5 = -0{,}25x_2 \Leftrightarrow x_2 = 22$. Die Zwischendecke ist also 22 m breit. (5)

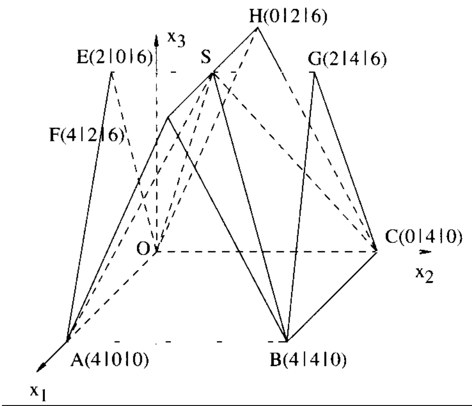
Aufgabe 3 (14)

Das Dach eines Turmes über einer quadratischen Grundfläche hat die nebenstehende Form. (1 LE = 1 m)

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Dachfläche BCHF liegt. (Ergebnis: E: $3x_2 + x_3 = 12$ (2)

b) In der Mitte der Strecke OA soll eine 7 m lange Fahnenstange verankert werden. Sie steht senkrecht zur Dachfläche BCHF und durchstößt die Giebelfläche BCG. Zur Aufhängung der Fahne muss die Fahnenstange mindestens 2,75 m in Freie ragen. Reicht ihrer Länge dafür aus? (5)

c) Die Dachkante CS soll senkrecht mit einem Balken vom Punkt A aus abgestützt werden. Welchen Abstand hat dieser Stützbalken von der Fahnenstange? (7)



Lösung:

a) E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und geht durch B(4|4|0) $\Rightarrow$ E: $3x_2 + x_3 = 12$ (2)

b) Die Fahnenstange liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1)

Die Giebelfläche BCG liegt in der Ebene F: $x_2 = 4$ (1)

$\Rightarrow g \cap F = Q(2|4|\frac{4}{3})$ (1)

Die Entfernung des Durchstoßpunktes Q vom Stützpunkt P(2|0|0) ist $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$ m $\approx 4{,}22$ m (1)

Der herausragende Teil ist also ca. 7 m − 4,22 m = 2,78 m lang, so dass die Länge für die Fahne ausreicht. (1)

c) Die Dachkante CS liegt auf der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1)

Der Fußpunktes des Lotes von A auf h ist L($\frac{8}{11}$ | $\frac{36}{11}$ | $\frac{24}{11}$) mit $\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} -36/11 \\ 36/11 \\ 24/11 \end{pmatrix}$ (2)

⇒ Der Stützbalken liegt auf der Lotgeraden l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1)

Ein gemeinsamer Normalenvektor der Geraden g (Fahnenstange) und l (Stützbalken) ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (1)

Die zu l parallele Trägerebene von g ist H: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$. (1)

Der Abstand d der beiden windschiefen Geraden g und l ist also der Abstand der Trägerebene E zum Stützpunkt S(4|0|0) von l ⇒ $d = \frac{1}{\sqrt{11}} \left| \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{11}} \approx 0{,}60$ m. (1)

Aufgabe 4 (7)

Die Punkte A(10|0|0), B(10|4|0) und C(0|4|0) bilden Eckpunkte eines quaderförmigen Holzklotzes (Längeneinheit: 1 dm), der auf einer horizontalen Fläche aufliegt. Die Eckpunkte A', B' und C' liegen jeweils 4 dm über den Punkten A, B und C. Im Eckpunkt C sitzt eine hungrige Spinne. Diese kann sich nur auf den Seitenflächen und auf der Deckfläche des Holzklotzes bewegen. Im Eckpunkt A' des Holzklotzes befindet sich eine Fliege.

Die Spinne bewegt sich auf einem geraden Weg über zwei Seitenflächen des Holzklotzes von C nach A' und überquert an einem Punkt S(10|4|t) die Kante BB'.

a) Bestimmen Sie die Länge des Weges von C nach A' in Anhängigkeit von t. (3)
b) Für welches t ist der Weg von C über S nach A' am kürzesten? (1)
c) Es gibt auf der Quaderoberfläche einen noch kürzeren Weg von C nach A'. Wie verläuft dieser Weg? (2)

Lösung:

a) $d_{CA'}(t) = \sqrt{10^2 + t^2} + \sqrt{4^2 + (4-t)^2} = \sqrt{t^2 + 100} + \sqrt{t^2 - 8t + 32}$

b) $d_{CA'}(t)$ hat ein Minimum bei $t = \frac{20}{7}$ (GTR oder graphisch durch Aufklappen der Flächen)

c) $d_{CA'}(\frac{20}{7}) = \sqrt{14^2 + 4^2} = \sqrt{212}$. Noch kürzer wäre der Weg über die Kante B'C' mit $d_{B'C'} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}$.

Aufgabe 5 (11)

In einem Koordinatensystem werden die Flugbahnen zweier mit jeweils konstanter Geschwindigkeit fliegender Flugzeuge durch Geraden beschrieben. Während Flugzeug 1 von A (0|0|6) nach B (−5|8|7) fliegt, ist Flugzeug 2 zeitgleich von C(−8|−8|8) nach D(−2|8|6) unterwegs. 1 LE entspricht 1 km, der Erdboden entspricht der x_1x_2-Ebene.

a) Wie groß ist der Steigungswinkel von Flugzeug 1 ? (1)
b) Wie groß ist der Abstand der beiden Flugbahnen ? (3)
c) Die Sicherheitsbestimmungen sehen vor, dass sich Flugzeuge dieser Art nicht näher als 1500 m kommen dürfen. Zeigen Sie, dass die Sicherheitsbestimmungen eingehalten werden. (4)
d) Ein Beobachter auf dem Erdboden steht senkrecht unter dem scheinbaren Schnittpunkt der Kondensstreifen. Wie groß erscheint für ihn der Schnittwinkel der beiden Kondensstreifen? (3)

Lösung

a) Flugzeug 1: f_1: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Flugbahn hat den Winkel

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{90}}\right) = 83{,}95°$ zur x_3-Achse und daher den Steigungswinkel $\beta = 90° - \alpha = 6{,}05°$ (1)

b) Flugzeug 2: f_1: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Flugbahnen haben also den Abstand

$d = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right) * \dfrac{\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{296}} = \dfrac{1}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{296}}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 128 \end{pmatrix} = \dfrac{128}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{296}} \approx 0{,}784$ km (3)

c) Der tatsächliche Abstand ist $d(t) = \sqrt{(-8+11t)^2 + (-8+8t)^2 + (2-3t)^2}$
mit Minimum bei $t \approx 0{,}814$ und $d_{min} \approx 1{,}82$ km (4)

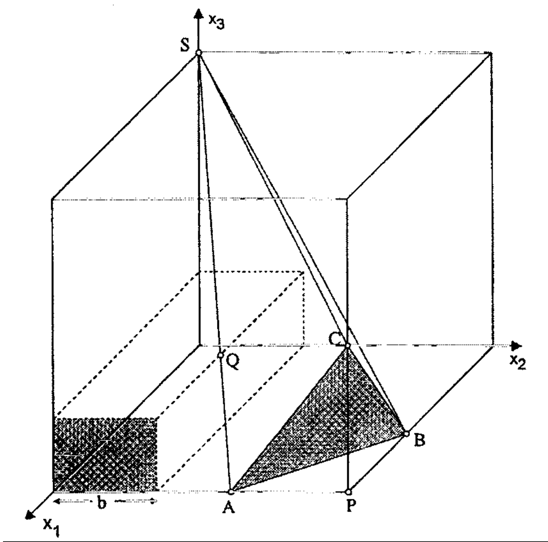
d) Die Projektionen der Kondenstreifen auf die x_1x_2-Ebene haben die Gleichungen

k_1: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und k_2: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2)

Ihr Schnittwinkel ist $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{73}}\right) \approx 60{,}24°$. (1)

Aufgabe 6 (16)

In einem Würfel mit den Eckpunkten 0(0│0│0), P(10│10│0) und S(0│0│10) befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind A(10│6│0), B(6│10│0) und C(10│10│5).



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt. Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: E : $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$) (6 VP)

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen? (5 VP)

c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze). Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite b = 4 ? Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist? (5 VP)

Lösung

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$. (1)

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\left|\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{66}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{|-4|}{\sqrt{66}}\right) \approx 60{,}5°$ (3)

Da $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}10\\10\\-10\end{pmatrix}$ nicht parallel zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$ ist, liegt die Höhe nicht auf PS. (2)

b) Die Grundfläche der Pyramide ist ein gleichschenkliges Dreieck mit M(8|8|0) (0,5)

$\Rightarrow$ d(M;C) = $\sqrt{2^2+2^2+5^2} = \sqrt{33}$. (0,5)

Mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{32}$ ergibt sich für die Grundfläche $A_G = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{33} = 2\sqrt{66}$ (1)

Die Höhe ist d(S;E) = $\dfrac{|5\cdot 0+5\cdot 0-4\cdot 10-80|}{\sqrt{66}} = \dfrac{120}{\sqrt{66}}$ LE (1)

Das Volumen ist damit V = $\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{66}\cdot\dfrac{120}{\sqrt{66}}$ = 80 VE (1)

Im Verhältnis zum Würfelvolumen 100 VE sind das 8 % (1)

c) Die Gerade durch A und S k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-10\\-6\\10\end{pmatrix}$ berührt Q bei $x_2 = 4$ bzw $t = \frac{1}{3}$. (1)

Die Höhe des Quaders ist also $h = \frac{1}{3}\cdot 10$ und das Volumen $V = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 10\cdot 10 = \frac{400}{3}$ (1)

Für $x_2 = b$ ergibt sich $t = 1 - \frac{b}{6}$ und die Höhe $c(b) = 10 - \frac{5}{3}b$ (1)

Das Volumen ist dann $V(b) = b\cdot(10 - \frac{5}{3}b)\cdot 10 = -\frac{50}{3}b^2 + 100b$ (1)

mit relativem Maximum an der Stelle b = 3 mit V(3) = 150 VE. (0,5)
Wegen V(0) =V(6) = 0 ist es auch das absolute Maximum. (0,5)

Aufgabe 7 (12)
Die Punkte A(5│0│0), B(5│3│0), C(5│0│4), F(0│0│0), G(0│3│0) und H(0│0│4) sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche BGHC liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.
(Teilergebnis: E : $4x_2 + 3x_3 = 12$) (6 VP)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius 0,5 und Grundkreismittelpunkt M (0│0,5│0,5), dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft. Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?

Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt M*(0│r│r), dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren. Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders. (6 VP)

Lösung

a) Zeichnung (1)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $4x_2 + 3x_3 = 12$. (1)

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{5\cdot 1}\right) = \cos^{-1}(0{,}6) \approx 53{,}1°$ (1)

Gerade durch C und G g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\-4\end{pmatrix}$ (0,5)

Hilfsebene durch A senkrecht zu g: K: $-5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -25$ (0,5)

$K \cap g$ liefert $t = \frac{8}{25}$ und den Lotfußpunkt $L(\frac{17}{5} \mid \frac{24}{25} \mid \frac{68}{25})$ (1)

Der gesuchte Abstand ist $d(A;L) = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{68}{25}\right)^2} \approx 3{,}3$ LE. (1)

b) Die Abstände von den Seitenflächen AFHC und ABGF sind jeweils 0,5. (1)

Der Abstand von E ist $d = \left|\frac{4\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}5 - 12}{5}\right| = 1{,}7$ LE (1)

Da der Zylinder den Radius 0,5 hat, berührt er AFHC und ABGF, nicht aber BGHC. (1)

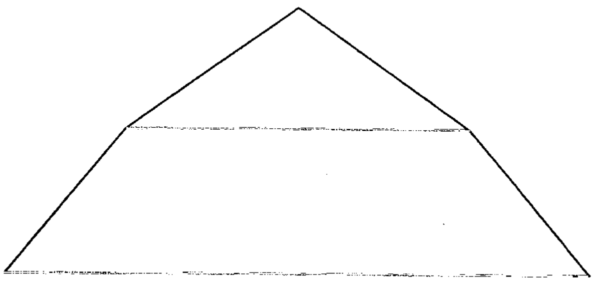
Für den anderen Zylinder muss gelten $\left|\frac{4\cdot r + 3\cdot r - 12}{5}\right| = r \Rightarrow r_1 = 1$ und $r_2 = 6$. (1)

Da M* im Inneren es Prismas liegt, gilt nur die erste Lösung. (1)

Der Zylinder mit Mittelpunkt M*(0 | 1 | 1) und r = 1 berührt BGHC und, wie man aus den Koordinaten von M* ablesen kann, auch AFHC und ABGF. (1)

Aufgabe 8 (16)

Unter den Bauwerken des Altertums gibt es auch Knickpyramiden. Beim Bau traten oft statische Probleme auf, weshalb man ab einer bestimmten Höhe die Steilheit der Seitenflächen verringern musste.



Querschnittsskizze, nicht maßstabsgetreu

Die quadratische Grundfläche einer solchen Knickpyramide wird durch die Punkte A(0 | 0 | 0), B(200 | 0 | 0), C(200 | 200 | 0) und D(0 | 200 | 0) gegeben (Koordinatenangaben in Meter).

Die vier Knickpunkte A', B'(170 | 30 | 40), C und D'(30 | 170 | 40) liegen auf gleicher Höhe und bilden ebenfalls ein Quadrat.

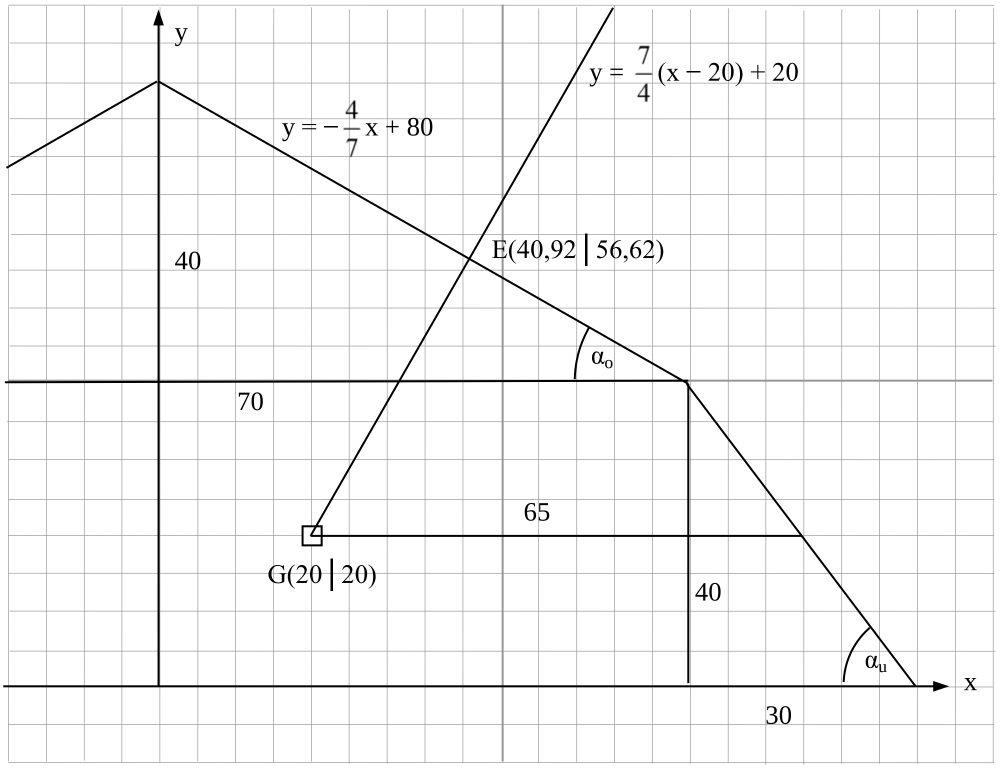
Die Spitze liegt bei S(100 | 100 | 80).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von A' und C.
Berechnen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Knickpyramide an der Kante C'D' bilden.
Wie hoch wäre die Pyramide ohne Knick geworden?
Ein Kubikmeter des verwendeten Baumaterials besitzt die Masse 2,5 t.
Bestimmen Sie die durch den Knick eingesparte Masse. (7 VP)

b) Mit einem akustischen Messverfahren stellt man im Innern der sonst massiven Pyramide eine Grabkammer mit dem Zentrum an der Stelle G(100 | 120 | 20) fest. Zu dieser Grabkammer soll von außen ein horizontal verlaufender, möglichst kurzer Gang gebohrt werden. Bestimmen Sie die Länge dieses Gangs.
Dieser horizontal verlaufende Gang ist allerdings nicht die kürzeste Verbindung von außen zur Grabkammer. Ermitteln Sie, an welcher Seitenfläche der Pyramide eine Bohrung ansetzen muss, die die kürzeste Verbindung zur Grabkammer liefert. (5 VP)

c) Ein Käfer läuft von B aus auf einem möglichst kurzen Weg bis zur Spitze S. Sein Weg führt über die Kante B'C'. An welcher Stelle überquert er diese Kante? (4 VP)

Lösung: (Die Aufgabe lässt sich **vollständig** ohne Vektoren lösen!)
Schnittzeichnung im Maßstab 1 : 1000 mit verschobenen Koordinatenachsen (!)



a) A'(30 | 30 | 40) und C'(170 | 170 | 40) (1)

Neigungswinkel unten $\alpha_u = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53{,}13°$, Neigungswinkel oben $\alpha_o = \tan^{-1}(\frac{4}{7}) = 29{,}74°$ (1)

$\Rightarrow$ Knickwinkel $\alpha = 180° - (\alpha_o - \alpha_u) = 156{,}61°$ (1)

Höhe ohne Knick = $\frac{100 \text{ m}}{30 \text{ m}} \cdot 40 \text{ m} = 133{,}3 \text{ m}$ (1)

Volumen der kleinen Pyramide $V_k = \frac{1}{3} \cdot (140 \text{ m})^2 \cdot 40 \text{ m}$, (1)

Volumen der großen Pyramide $V_g = \frac{1}{3} \cdot (140 \text{ m})^2 \cdot 93{,}3 \text{ m}$ (1)

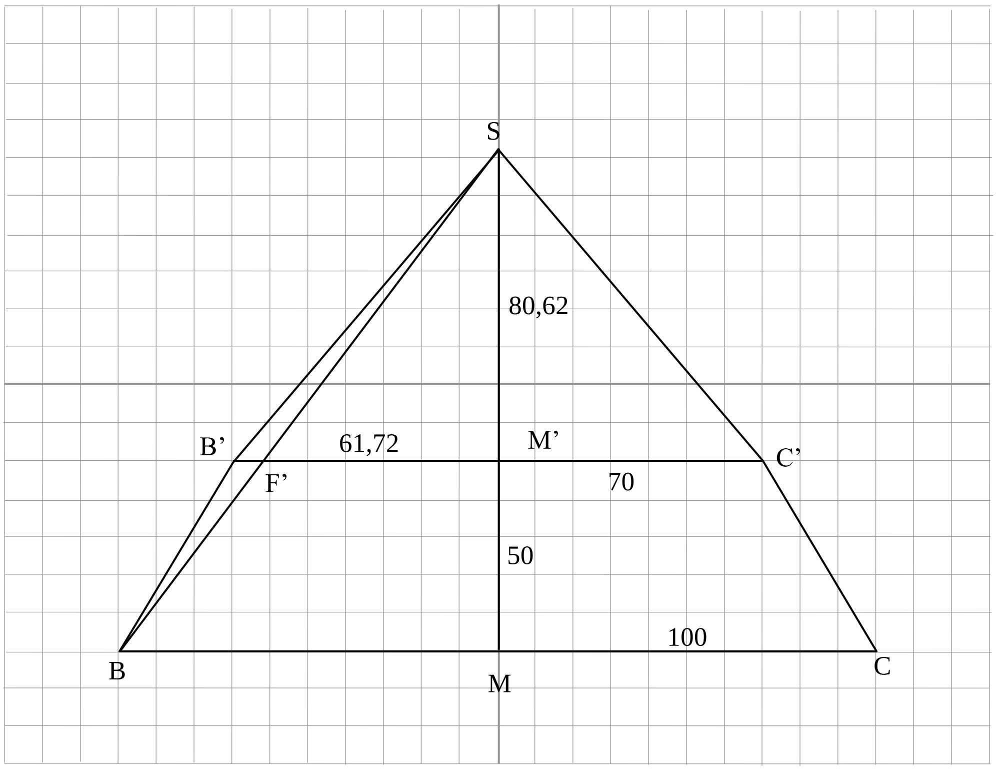
$\Rightarrow$ eingesparte Masse $m = \rho \cdot (V_g - V_k) = 2{,}5 \text{ t/m}^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (140 \text{ m})^2 \cdot 53{,}3 \text{ m} = 870566{,}67 \text{ t}$. (1)

b) Der Gang ist 65 m lang (siehe Zeichnung) (1)
Der kürzeste Weg ist zur Fläche C'D'S (siehe Zeichnung). (1)
Begründung: Der Durchstoßpunkt E ergibt sich durch Gleichsetzen der eingezeichneten Geraden: (1)

$\frac{7}{4}(x - 20) + 20 = -\frac{4}{7}x + 80 \Leftrightarrow \frac{65}{28}x = 95 \Leftrightarrow$ E(40,92 | 56,62) (1)

Die Länge dieses Weges ist dann $\sqrt{(56{,}62 - 20)^2 + (40{,}92 - 20)^2} \approx 42{,}17 \text{ m}$ (1)

c) Netz im Maßstab 1 : 2000

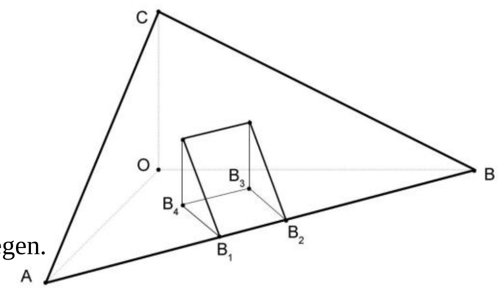


Die Seitenflächen haben die Höhen $\sqrt{30^2+40^2}$ = 50 m und $\sqrt{70^2+40^2}$ ≈ 80,62 m. (1)

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BMS und F’M’S erhält man $\overline{F'M'}$ = 100m$\cdot\frac{80,62}{50+80,62}$ ≈ 61,72 m. (1)

Der Käfer überquert die Kante also in F’(170 | 38,28 | 40) (2)

Aufgabe 9 (16)



Ein ebenes dreieckiges Hanggrundstück hat die Eckpunkte A(24 | 0 | 0), B(0 | 36 | 0) und C(0 | 0 | 12). Senkrecht über der quadratischen Fläche mit den Eckpunkten B_1(16 | 12 | 0), B_2(12 | 18 | 0), B_3(6 | 14 | 0) und B_4 wird die Erde ausgehoben. Ein Mast wird senkrecht zur x_1x_2-Ebene so aufgestellt, dass sich sein Fußpunkt F im Mittelpunkt des Quadrates befindet (siehe Abbildung, alle Angaben in Meter)

a) Zeigen Sie, dass B_1 und B_2 auf der Geraden durch A und B liegen.
Bestimmen Sie die Koordinaten von B_4 und F.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, in der das Hanggrundstück liegt. (Teilergebnis E: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 72$) (5)

b) Berechnen Sie das Volumen des Aushubs senkrecht über dem Quadrat. (3)

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes aus dem Hang, der zur Mastspitze S(11 | 13 | 18,5) den kürzesten Abstand hat.
Wie groß ist dieser Abstand?
Im Punkt N(5 | 9 | 6,5) auf dem Hang wird ein zweiter Mast errichtet, der 6,5 m hoch ist und ebenfalls senkrecht zur x_1-x_2-Ebene steht. Zwischen den beiden Masten wird eine Verbindungsstange montiert. Wie lang ist diese? (4)

d) Am ersten Mast wird im Punkt T(11 | 13 | 17) ein Schweinwerfer befestigt, der auf den Mast aus Teilaufgabe c hin ausgerichtet ist und einen Teil des Hangs beleuchten soll. Zeigen Sie, dass der Schatten der Spitze des zweiten Masts innerhalb des Hangdreiecks ABC liegt. (4)

Lösung

a) g_{AB}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Punktprobe ergibt $B_1 \in g_{AB}$ für t = 4 und $B_2 \in g_{AB}$ für t = 6. (2)

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B_3} \Rightarrow F(11 \mid 13 \mid 0)$ und $\overrightarrow{OB_4} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_2B_3} \Rightarrow B_4(10 \mid 8 \mid 0)$ (1)

Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -24 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 144\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 144\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow$ E: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = d$ mit $C \in E \Rightarrow 6\cdot 12 = d \Rightarrow$ E: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 72$ (1)

b) Der ausgehobene Körper ist ein Prisma mit dem rechtwinkligen Dreieck B_4B_1D als Grundfläche und der Höhe B_1B_2. Dabei liegt $D(10 \mid 8 \mid d_3)$ senkrecht über B_4 in E. (1)

Einsetzen $3\cdot 10 + 2\cdot 8 + 6\cdot d_3 = 72$ ergibt $d_3 = \frac{13}{3}$ (1)

Mit $\overline{B_4B_1} = \overline{B_1B_2} = \sqrt{52}$ erhält man (0,5)

$V = \frac{1}{2}\cdot\overline{B_4B_1}\cdot\overline{B_4D}\cdot\overline{B_1B_2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{52}\cdot\frac{13}{3}\cdot\sqrt{52} = \frac{338}{3} \approx 112{,}7$ VE (0,5)

c) Lotgerade zu E durch S: g_l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 18{,}5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ (1)

$g_l \cap E \Rightarrow t = -2 \Rightarrow$ Lotfußpunkt $L(5 \mid 9 \mid 6{,}5)$ mit $\overline{LS} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} = 14$ LE (1)

Da die beiden Masten senkrecht zur x_1-x_2-Ebene stehen, genügt es, den Abstand ihrer Fußpunkte $M_1(11 \mid 13 \mid 0)$ und $M_2(5 \mid 9 \mid 0)$ auf dieser Koordinatenebene zu bestimmen. Die Verbindungsstange ist also $\overline{M_1M_2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ m lang (2)

d) Spitze des zweiten Masts: $Q(5 \mid 9 \mid 13) \Rightarrow$ Lichtstrahl g_{TQ}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $t > 0$. (1,5)

$g_{TQ} \cap E \Rightarrow t = 1{,}78 \Rightarrow$ der Schatten der Spitze des zweiten Masts liegt in $P(0{,}32 \mid 5{,}88 \mid 9{,}88)$ (1,5)

Da alle drei Koordinaten positiv sind, liegt der Punkt innerhalb des Hangdreiecks ABC. (1)