7.7. Prüfungsaufgaben zu Abständen und Winkeln

Aufgabe 1 (13)

Gegeben sind die Geraden f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ mit r, s, t ∈ ℝ.

a) In welchem Winkel stehen g und h zueinander?(1)
b) Welchen Abstand hat g zu h? (2)
c) f und g liegen in einer gemeinsamen Ebene E. Bestimmen Sie ihre Koordinatengleichung sowie ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie ihre Lage in einem Koordinatensystem. (4)
d) In welchem Winkel steht h zu E? (2)
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h', die durch Spiegelung von h an E entsteht. (4)

Lösung

a) $\measuredangle(g;h) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}\right) \approx 73{,}6°$ (1)

b) $d(g;h) = \left|\frac{\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{46}}\right| = \frac{13}{\sqrt{46}} \approx 1{,}91$ LE (2)

c) E: $-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$ (1)
Achsenschnittpunkte $S_1(-12 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 3)$ (1,5)
Skizze (1,5)

d) $\measuredangle(E;h) = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{5}}\right) \approx 61{,}3°$ (1)

e) Schnittpunkt $S_{E\cap h}$: Einsetzen h in E ergibt t = 1,3 ⇒ $S_{E\cap h}(1 \mid -1{,}4 \mid 4{,}3)$ (1)

Lotgerade auf E durch $P(1 \mid -4 \mid 3)$ l: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ (1)

Lotfußpunkt L: Einsetzen l in E ergibt u = 0,5 ⇒ $L(0{,}5 \mid -2{,}5 \mid 5)$
Spiegelpunkt P': Einsetzen von u = 1 in l ergibt $P'(0 \mid -1 \mid 7)$ (1)

Gespiegelte Gerade h' durch $S_{E\cap h}$ und P' h' $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1{,}4\\4{,}3\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\0{,}4\\2{,}7\end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 2 (2)

Welchen Abstand hat der Punkt P(1|0|0) von der Ebene E: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$?

Lösung

Mit Q(1|1|1) ∈ E und erhält man $d = \left|\overrightarrow{PQ}*\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (2 VP)

Aufgabe 3 (4) (N 2009)

Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 3 \mid 0)$, $B(3 \mid 7 \mid -4)$ und $C(2 \mid 8 \mid 1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes ABC.

Lösung

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}24\\-6\\6\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\left|\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}\ \text{FE} \qquad (4)$$

Aufgabe 4 (3)
Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F im Abstand 3. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

Lösung

1. Bestimme einen Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ von E .und einen Punkt $P \in E$. (1)
2. Der Punkt Q mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \pm 3\,\vec{n}$ liegt dann auf F. (1)
3. Eine Gleichung von F ist dann F: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit $d = \overrightarrow{OQ} * \vec{n}$. (1)

Aufgabe 5 (5)
Gegeben ist die Ebene E: $(\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n} = 0$ und der Punkt P. Beschreiben Sie mit Hilfe einer Skizze, wie man die Koordinaten des Punktes P' ermittelt, der durch Spiegelung von P an E entsteht.

Lösung

Abstand $d = (\overrightarrow{OP} - \vec{p}) * \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ berechnen (1)

$\Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot d\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ (2)

Skizze (2)

Aufgabe 6 (5)

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der beiden Geraden in einem Koordinatensystem
b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander

Lösung

a) g verläuft parallel zur x_1-Achse durch den Punkt $P(0|1|4)$. (1)
   h verläuft in der x_1-x_2-Ebene durch den Punkt $P(0|0|-2)$. (1)

b) Gemeinsamer Normaleneinheitsvektor ist z.B. $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow d = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 6$ LE (2)

Aufgabe 7 (5)
Welche Punkte der x_3-Achse haben von der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ den Abstand 1 LE?

Lösung

Die Punkte haben die Koordinaten $P(0|0|x_3)$ mit $1 = \left|\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}\right) * \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|$ (3)

$\Leftrightarrow 3 = |1 - 2x_3| \Leftrightarrow x_3 = 2$ oder $x_3 = -1 \Rightarrow$ Die Punkte sind $P_1(0|0|2)$ und $P_2(0|0|-1)$ (2)

Aufgabe 8 (7)

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und der Punkt P(6|0|4).

a) Geben Sie in Abhängigkeit von einem Parameter die Koordinaten aller Punkte A_1 und A_2 an, für die das Dreieck A_1A_2P gleichschenklig mit der Basis A_1A_2 ist. **Hinweis**: Wählen Sie den Parameter d und suchen Sie alle Punkte A $\in$g, die einen Abstand $\overline{AP} = d$ von P haben. (4)

b) Für welche A_1 und A_2 ist das Dreieck A_1A_2P gleichseitig? (3)

Lösung

a) $\overline{AP} = d \Leftrightarrow (-4 + r)^2 + r^2 + 4^2 = d^2 \Leftrightarrow 2r^2 - 8r + 32 - d^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1/2} = 2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12} \Rightarrow A_{1/2}(8 \mp \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12}\ |2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12}\ |0)$. (4)

b) A_1A_2P gleichseitig $\Leftrightarrow \overline{A_1A_2} = \overline{AP} = d \Leftrightarrow 2d^2 - 48 + 2d^2 - 48 = d^2 \Leftrightarrow d^2 = 32 \Rightarrow r_{1/2} = 2 \pm 2 \Rightarrow$ $A_1(6|4|0)$ und $A_2(10|0|0)$ (3)

Aufgabe 9 (5)

Gegeben sind der Punkte A(−2|−1|0) und die Ebene F: $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$.

a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden h, die senkrecht zu F und durch A verläuft. (1)

b) An welcher Stelle durchstößt die Gerade h die Ebene F? (3)

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C, der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene F entsteht. (1)

Lösung

a) h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ (1)

b) Parameterdarstellung der Ebene z.B. F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit s, t $\in \mathbb{R} \Rightarrow h = F \Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow s = -\frac{6}{7}$, $t = \frac{8}{7}$ und $r = \frac{2}{7} \Rightarrow L(-\frac{8}{7}|-\frac{3}{7}|-\frac{12}{7})$ (3)

c) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{n_F} \Rightarrow C(-\frac{2}{7}|\frac{1}{7}|-\frac{24}{7})$ (1)

Aufgabe 10 (7)

Flugzeug A startet im Punkt $A_0(0|0|0)$ und fliegt mit 240 km/h geradlinig in Richtung des Punktes $A_1(3|4|1)$. Flugzeug B startet 10 Sekunden später vom Punkt $B_0(0|10|0)$ mit 300 km/h ebenfalls geradlinig in Richtung des Punkte $B_1(4|-5|2)$. Alle Angaben sind in km.

a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugbahnen von A und B. (2)

b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugzeuge A und B. Nach wie vielen Sekunden dieser erreicht?

Lösung

a) Die Flugbahnen sind g_A: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und g_B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit r, s > 0. (1)

$\Rightarrow$ Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -2 \\ -51 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Abstand $\dfrac{\begin{pmatrix} 23 \\ -2 \\ -51 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{23^2 + 2^2 + 51^2}} \approx 0{,}357$ km (1)

b) Die Geschwindigkeiten sind v_A = 240 km/h = $66,\overline{6}$ m/s und v_B = 300 km/h = $83,\overline{3}$ m/s. (1)

Die Ortsvektoren von A und B in Metern nach t Sekunden sind dann

$$\overrightarrow{x_A}(t) = t\cdot\frac{66,\overline{6}}{\sqrt{3^2+4^2+1^1}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} \approx t\cdot 13,07\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}39,21t\\52,28t\\13,07t\end{pmatrix}$$ (1)

$$\overrightarrow{x_B}(t) = \begin{pmatrix}0\\10\,000\\0\end{pmatrix} + (t-10)\cdot\frac{83,\overline{3}}{\sqrt{4^2+15^2+2^1}}\cdot\begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\10\,000\\0\end{pmatrix} + (t-10)\cdot 5,32\cdot\begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21,28(t-10)\\10000-79,8(t-10)\\10,64(t-10)\end{pmatrix}$$

(1)

$\Rightarrow$ Abstand $d_{AB}(t) = \sqrt{(39,21t-21,28(t-10))^2+(52,28t-(10000-79,8(t-10))^2+(13.07t-10,64(t-10))^2}$

wird minimal nach t ≈ 80,015 Sekunden mit 1690,38 m (GTR) (2)