7.7. Prüfungsaufgaben zu Abständen und Winkeln

Question 0 (9)

a) Find the Perpendicular from the point P(1|−1|2) on the plane E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. (5)

b) Find the distance between P and E. (2)

c) Find the cutting angle between E and the x-Axis. (2)

Question 0 (6)

a) E: $-4x + y - 3z = -5 \Leftrightarrow 4x - y + 3z = 5$ (2)

Substituting $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n}$ leads to $4(1 + 4t) - (-1 - t) + 3(2 + 3t) = 5 \Leftrightarrow 26t = -6 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{13}$ (2)

The perpendicular has the position vector $\vec{x} = \overrightarrow{OP} - \frac{3}{13}\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{13}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}1\\-10\\17\end{pmatrix} \Rightarrow P(\frac{1}{13}|-\frac{10}{13}|\frac{17}{13})$ (1)

b) $\Rightarrow d = \frac{3}{13}\cdot|\vec{n}| = \frac{3}{13}\sqrt{26}$ (2)

c) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{26}}\right) \approx 51{,}7°$ (2)

Aufgabe 1 (15)

a) Bestimme die Schnittpunkte der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ mit den Koordinatenebenen. (3)

b) Bestimme die Schnittpunkte der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen. (3)

c) Zeichne g und E mit allen Schnittpunkten aus Teil a) und b) in ein gemeinsames Koordinatensystem. (4)

d) Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von g und E. (5)

Lösungen:

a) $S_{xy}(-1|-1|0)$, $S_{xz}(3|0|4)$ und $S_{yz}(0|-\frac{3}{2}|1)$ (3)

b) $S_x(4|0|0)$, $S_y(0|2|0)$ und $S_z(0|0|\frac{8}{3})$ (3)

c) Zeichnung (4)

d) Gleichsetzen E = g führt auf $t = -\frac{12}{7} \Rightarrow S_{Eg}(\frac{11}{7}|-\frac{5}{7}|\frac{18}{7})$ (3)

Orthogonalitätsbedingung $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ führt mit Probieren oder LGS auf z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{9}}\right) \approx 60{,}1°$ (1)

Aufgabe 2a (18)

a) Berechne den Winkel α und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten A(0|–3|–2), B(–2|0|–4) und C(–4|–3|0). (4)

b) Bestimme die Schnittpunkte der Ebene E durch ABC mit den Koordinatenachsen. (4)

c) Berechne den Schnittpunkt sowie die Schnittwinkel von E mit der Geraden g durch D(7|1|2) und E(9|2|3). (6)

d) Zeichne g und E mit allen Schnittpunkten aus Teil b) und c) in ein gemeinsames Koordinatensystem. (4)

Lösungen:

a) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{20}}\right) \approx 77{,}47°$ (2)

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\ \sin(\alpha) = 9$ FE (2)

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $S_1(-10|0|0)$, $S_2(0|-5|0)$ und $S_3(0|0|-5)$ (4)

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $S_{12}(3|-1|0)$, $S_{13}(5|0|1)$ und $S_{23}(0|-\frac{5}{2}|-\frac{3}{2})$ (2)

Gleichsetzen E = g führt auf t = –5 ⇒ $S_{Eg}(-3|-4|-3)$ (3)

Orthogonalitätsbedingung $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ führt mit Probieren oder LGS auf z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{6}}\right) \approx 54{,}73°$ (1)

d) Zeichnung (4)

Aufgabe 2b (18)

a) Berechne den Winkel α und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A(0|–3|–2), B(5|0|–2) und C(5|–3|0). (4)

b) Bestimme die Schnittpunkte der Ebene E durch ABC mit den Koordinatenachsen. (4)

c) Berechne den Schnittpunkt sowie die Schnittwinkel von E mit der Geraden g durch D(0|1|4) und E(–2|2|6). (6)

d) Zeichne g und E mit allen Schnittpunkten aus Teil b) und c) in ein gemeinsames Koordinatensystem. (4)

Lösungen:

a) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{29}}\right) \approx 37{,}2°$ (2)

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\ \sin(\alpha) = 9{,}5$ FE (2)

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$ mit $S_1(10|0|0)$, $S_2(0|-6|0)$ und $S_3(0|0|-4)$ (4)

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $S_{12}(4|-1|0)$, $S_{13}(2|0|2)$ und $S_{23}(0|1|4)$ (2)

Gleichsetzen E = g führt auf $t = -\frac{5}{2}$ und $r = s = \frac{1}{2}$ ⇒ $S_{Eg}(5|-\frac{3}{2}|-1)$ (3)

Orthogonalitätsbedingung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ führt mit Probieren oder LGS auf z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{361} \cdot \sqrt{9}}\right) \approx 65{,}82°$ (1)

d) Zeichnung (4)

Aufgabe 3 (13)

Gegeben sind die Geraden f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit r, s, t $\in \mathbb{R}$.

a) In welchem Winkel stehen g und h zueinander?(1)
b) Welchen Abstand hat g zu h? (2)
c) f und g liegen in einer gemeinsamen Ebene E. Bestimmen Sie ihre Koordinatengleichung sowie ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie ihre Lage in einem Koordinatensystem. (4)
d) In welchem Winkel steht h zu E? (2)
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h', die durch Spiegelung von h an E entsteht. (4)

Lösung

a) $\sphericalangle(g;h) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 73{,}6°$ (1)

b) $d(g;h) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{46}} \right| = \frac{13}{\sqrt{46}} \approx 1{,}91$ LE (2)

c) E: $-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$ (1)
Achsenschnittpunkte $S_1(-12|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|3)$ (1,5)
Skizze (1,5)

d) $\sphericalangle(E;h) = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 61{,}3°$ (1)

e) Schnittpunkt $S_{E\cap h}$: Einsetzen h in E ergibt t = 1,3 $\Rightarrow$ $S_{E\cap h}(1|-1{,}4|4{,}3)$ (1)

Lotgerade auf E durch P(1|−4|3) l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (1)

Lotfußpunkt L: Einsetzen l in E ergibt u = 0,5 $\Rightarrow$ L(0,5|−2,5|5)
Spiegelpunkt P': Einsetzen von u = 1 in l ergibt P'(0|−1|7) (1)

Gespiegelte Gerade h' durch $S_{E\cap h}$ und P' h' $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}4 \\ 4{,}3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}4 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 4 (2)

Welchen Abstand hat der Punkt P(1|0|0) von der Ebene E: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$?

Lösung

Mit Q(1|1|1) ∈ E und erhält man $d = \left| \overrightarrow{PQ} * \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (2)

Aufgabe 5 (4) (N 2009)

Gegeben sind die Punkte A(1|3|0), B(3|7|–4) und C(2|8|1). Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes ABC.

Lösung

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times C| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix}24\\-6\\6\end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$ FE (4)

Aufgabe 6 (3)

Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F im Abstand 3. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

Lösung

1. Bestimme einen Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ von E .und einen Punkt P ∈ E. (1)
2. Der Punkt Q mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \pm 3\vec{n}$ liegt dann auf F. (1)
3. Eine Gleichung von F ist dann F: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit $d = \overrightarrow{OQ} * \vec{n}$. (1)

Aufgabe 7 (5)

Gegeben ist die Ebene E: $(\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n} = 0$ und der Punkt P. Beschreiben Sie mit Hilfe einer Skizze, wie man die Koordinaten des Punktes P' ermittelt, der durch Spiegelung von P an E entsteht.

Lösung

Abstand $d = (\overrightarrow{OP} - \vec{p}) * \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ berechnen (1)

$\Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ (2)

Skizze (2)

Aufgabe 8 (5)

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der beiden Geraden in einem Koordinatensystem
b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander

Lösung

a) g verläuft parallel zur x_1-Achse durch den Punkt P(0|1|4). (1)
   h verläuft in der x_1-x_2-Ebene durch den Punkt P(0|0|−2). (1)

b) Gemeinsamer Normaleneinheitsvektor ist z.B. $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow d = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 6$ LE (2)

Aufgabe 9 (5)
Welche Punkte der x_3-Achse haben von der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ den Abstand 1 LE?

Lösung

Die Punkte haben die Koordinaten $P(0|0|x_3)$ mit $1 = \left|\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}\right) * \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|$ (3)

$\Leftrightarrow 3 = |1 - 2x_3| \Leftrightarrow x_3 = 2$ oder $x_3 = -1 \Rightarrow$ Die Punkte sind $P_1(0|0|2)$ und $P_2(0|0|-1)$ (2)

Aufgabe 10 (7)

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und der Punkt $P(6|0|4)$.

a) Geben Sie in Abhängigkeit von einem Parameter die Koordinaten aller Punkte A_1 und A_2 an, für die das Dreieck A_1A_2P gleichschenklig mit der Basis A_1A_2 ist. **Hinweis**: Wählen Sie den Parameter d und suchen Sie alle Punkte $A \in g$, die einen Abstand $\overline{AP} = d$ von P haben. (4)
b) Für welche A_1 und A_2 ist das Dreieck A_1A_2P gleichseitig? (3)

Lösung

a) $\overline{AP} = d \Leftrightarrow (-4 + r)^2 + r^2 + 4^2 = d^2 \Leftrightarrow 2r^2 - 8r + 32 - d^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1/2} = 2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12}$

$\Rightarrow A_{1/2}\left(8 \mp \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12}\ \middle|\ 2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - 12}\ \middle|\ 0\right)$. (4)

b) A_1A_2P gleichseitig $\Leftrightarrow \overline{A_1A_2} = \overline{AP} = d \Leftrightarrow 2d^2 - 48 + 2d^2 - 48 = d^2 \Leftrightarrow d^2 = 32$

$\Rightarrow r_{1/2} = 2 \pm 2 \Rightarrow A_1(6|4|0)$ und $A_2(10|0|0)$ (3)

Aufgabe 11 (5)
Gegeben sind der Punkte $A(-2|-1|0)$ und die Ebene F: $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$.
a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden h, die senkrecht zu F und durch A verläuft. (1)
b) An welcher Stelle durchstößt die Gerade h die Ebene F? (3)
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C, der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene F entsteht. (1)

Lösung

a) h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\vec{n}_F = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ (1)

b) Parameterdarstellung der Ebene z.B. F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ (1)

$\Rightarrow h = F \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 4\\ -2 & 0 & -6 & 0\end{array}\right) \Rightarrow s = -\frac{6}{7}, t = \frac{8}{7}$ und $r = \frac{2}{7} \Rightarrow L\left(-\frac{8}{7}\middle|-\frac{3}{7}\middle|-\frac{12}{7}\right)$ (2)

c) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\cdot\vec{n}_F \Rightarrow C\left(-\frac{2}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|-\frac{24}{7}\right)$ (1)

Aufgabe 12 (7)
Flugzeug A startet im Punkt $A_0(0|0|0)$ und fliegt mit 240 km/h geradlinig in Richtung des Punktes $A_1(3|4|1)$. Flugzeug B startet 10 Sekunden später vom Punkt $B_0(0|10|0)$ mit 300 km/h ebenfalls geradlinig in Richtung des Punkte $B_1(4|-5|2)$. Alle Angaben sind in km.
a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugbahnen von A und B. (2)
b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugzeuge A und B. Nach wie vielen Sekunden dieser erreicht?

Lösung

a) Die Flugbahnen sind g_A: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ und g_B: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix}$ mit r, s > 0. (1)

$\Rightarrow$ Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\-2\\-51\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Abstand $\dfrac{\begin{pmatrix}23\\-2\\-51\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{23^2+2^2+51^2}} \approx 0{,}357$ km (1)

b) Die Geschwindigkeiten sind v_A = 240 km/h = $66,\bar{6}$ m/s und v_B = 300 km/h = $83,\bar{3}$ m/s. (1)
Die Ortsvektoren von A und B in Metern nach t Sekunden sind dann

$\vec{x}_A(t) = t\cdot\dfrac{66,\bar{6}}{\sqrt{3^2+4^2+1^1}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} \approx t\cdot 13{,}07\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}39{,}21t\\52{,}28t\\13{,}07t\end{pmatrix}$ (1)

$\vec{x}_B(t) = \begin{pmatrix}0\\10\,000\\0\end{pmatrix} + (t-10)\cdot\dfrac{83,\bar{3}}{\sqrt{4^2+15^2+2^1}}\cdot\begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\10\,000\\0\end{pmatrix} + (t-10)\cdot 5{,}32\cdot\begin{pmatrix}4\\-15\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21{,}28(t-10)\\10000-79{,}8(t-10)\\10{,}64(t-10)\end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow$Abstand $d_{AB}(t) = \sqrt{(39{,}21t-21{,}28(t-10))^2+(52{,}28t-(10000-79{,}8(t-10))^2+(13.07t-10{,}64(t-10))^2}$
wird minimal nach t ≈ 80,015 Sekunden mit 1690,38 m (GTR) (2)

Aufgabe 13 (25)

a) In den unendlichen Weiten des Weltraums schwebt der neue Kampfstern der Klingonen. Er hat die Form einer Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche. Ihre Eckpunkte sind A(10|−30|0), B(10|10|−30), C(−40|10|−30) und D. Die beiden Punkte S_1(−15|5|5) und S_2 bilden die beiden gegenüberliegenden Spitzen. Alle Angaben sind in Metern. Ergänze die Koordinaten der Punkte D und S_2. (2)

b) Berechne den Winkel, in dem die beiden Bordwände ABS_1 und BCS_1 zueinander geneigt sind. (2)

c) Lord Uzbuk befindet sich wie immer im Ursprung seines Koordinatensystems. Wie weit ist er von der Bordwand ABS_1 entfernt? (2)

d) Lord Uzbuk ist ein Schöngeist und erzählt jedem, er es hören will oder auch nicht, dass sein neuer Kampfstern ein perfekter regelmässiger Oktaeder sei. Stimmt das? Berechne das Volumen des Kampfsterns. (6)

e) Qietschend schiebt sich eine rostige Panzerplatte beiseite und Lord Uzbuk streckt neugierig ein grün schillerndes Stielauge aus der Öffnung um den Punkt P(x_1|−4|−2) in der Bordwand ABS_1, um einen wohlgefälligen Blick auf den kürzlich erworbenen Teil der Galaxie zu werfen. Ergänze die fehlende Koordinate x_1. (1)

f) Fast beisst er sich vor Schreck in einen Tentakel, denn im Punkt Z(992|0|0) erblickt er ein waffenstarrendes Raumschiff der Zorg. Diese halbvertrockneten Lebensformen bestehen aus einem brüchigen Knochengerüst mit darübergespannter farbloser Haut und vier armseligen dünnen Gliedmassen sowie bloss zwei im Schädel vergrabene Augen. Sie sind extrem hässlich und aggressiv. Tatsächlich: Ein hochenergetischer Laserstrahl entlang der x_1-Achse zerreisst das Nichts und trifft auf Uzbuks Kampfstern. Berechne die Koordinaten des Treffpunktes und den Auftreffwinkel des Laserstrahls. (2)

g) Puh, das war knapp! Lord Uzbuk überlässt das Kämpfen eigentlich lieber den einfacheren Lebensformen: Der klingonische Kampfstern ist unbewaffnet aber vollkommen verspiegelt. Der Laserstrahl wird im Punkt T(−8|0|0) reflektiert und trifft zufällig das grosse galaktische Monster, welches sich im gleichen Abstand auf der Position M(x_1|600|x_3) befindet. Berechne die Gleichung des reflektierten Laserstrahls und die fehlenden Koordinaten von M. (6)

h) Das Monster ist erledigt. Für Zorgschiff Z, welches sich auf der Flugbahn z: $\vec{x} = \begin{pmatrix}992\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}$ mit t > 0 in Sekunden bewegt, wählt Lord Uzbuk die übliche Ablenkungmassnahme: Eine Kugel voller DSDS-Castingtickets, welche auf der Bahn k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-8\\-20\\-30\end{pmatrix} + (t-3)\cdot\begin{pmatrix}400\\204\\206\end{pmatrix}$ mit t > 3 in Sekunden geschossen wird, zerplatzt genau auf der Flugbahn von Z. Berechne, wo und wann die Kugel zerplatzt und wann Z die Wolke mit den Castingtickets erreicht. Gib ausserdem die Reaktionszeit von Lord Uzbuk an. (5)

Lösungen

a) D(−40|−30|0) und S_2(−15|−25|−35) (2)

b) ABS_1: $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -40$ und BCS_1: $7x_2 + x_3 = 40 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}}\right) = \cos^{-1}(0{,}5) = 60°$ (2)

c) $d = \dfrac{|\overrightarrow{OA} * \vec{n}_{ABS}|}{|\vec{n}_{ABS}|} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ m. (2)

d) Es ist **kein** regelmässiger Oktaeder, denn 50 m = $\overline{AB} \neq \overline{AS_1} = \sqrt{25^2 + 35^2 + 5^2} = 25\sqrt{3}$. (2)

Der Mittelpunkt des Kampfsterns ist. M(−15|−10|−15) und die Höhe einer Pyramide ist h = 25 m (2)

$\Rightarrow V = \dfrac{2}{3}\cdot G\cdot h = \dfrac{50^3}{3} = \dfrac{125000}{3}\ m^3 \approx 41\ 666{,}7\ m^3$ (2)

e) Aus $5x_1 + 3\cdot(-4) + 4\cdot(-2) = -40$ ergibt sich die fehlende Koordinate $x_1 = -4$ (1)

f) Aus $5x_1 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0 = -40$ ergibt sich $x_1 = -8 \Rightarrow$ Treffpunkt T−8|0|0) (1)

Auftreffwinkel $\alpha = \sin^{-1}\dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{50}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$. (1)

g) Die Lotgerade durch Z(992|0|0) auf die Bordwand ABS_1 ist l: $\vec{x} = \begin{pmatrix}992\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$ (1)

⇒Lotfusspunkt L(492|−300|−400) für r = −100. (1)

Monster: Wegen $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OZ} + 2\overrightarrow{LT} = \begin{pmatrix}992\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-500\\300\\400\end{pmatrix}$ ergibt sich M(−8|600|800). (1)

Der reflektierte Laserstrahl hat also die Gleichung l': $\vec{x} = \overrightarrow{OT} + r'\,\overrightarrow{TM} = \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + r'\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ (2)

h) Die Bahngeraden schneiden sich in P(1992|1000|1000). (2)

Die Kugel erreicht diesen Punkt zur Zeit t = 8 s und G_2 zur Zeit t = 10 s. (2)

Lord Uzbuk benötigt drei Sekunden, um die Kugel auf den Weg zu schicken. (1)

Aufgabe 14 (20)

Alle Angaben in dieser Aufgabe sind in Metern.

a) Aus der Ebene $x_3 = 0$ eines Gartens erhebt sich ein Hügel $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 17)^2 = 340$. Bestimme die Höhe des Hügels über der Ebene. (1)

b) Auf dem Hügel steht ein Fliederbusch mit angenähert kugelförmiger Form $x_1^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 3)^2 = 1$. Seine Wurzel sei genau unter dem Zentrum der Laubkugel. Bestimme ihre Lage. (2)

c) Schmetterling Heinrich befindet sich im Punkt P(4|20|7), als er zur Zeit t = 0 den duftenden Flieder bemerkt. Er setzt zu einem flachen geradlinigen Gleitflug an, der ihn mit einer Geschwindigkeit von $3\sqrt{2}\ \dfrac{m}{s} \approx 3{,}4\ \dfrac{m}{s}$ genau in das Zentrum der Laubkugel führen soll. Bestimme die Gleichung seiner Flugbahn. (2)

d) Wie viele Sekunden wird Heinrich bis zum Zentrum der Laubkugel benötigen? (1)

e) Dicht über dem Swimming-Pool lauert aber die Libelle Max. Als sie Heinrich zur Zeit t = 1 Sekunde erblickt, nimmt sie den Kurs m: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-7\\2\\0\end{pmatrix} + t'\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ mit t' = t − 1, um Max abzufangen. Berechne Ort und Zeit des Aufeinandertreffens sowie die Geschwindigkeit der Libelle. (3)

f) Heinrich befindet sich zur Zeit t = 2 Sekunden im Punkt H(2|12|5), als er in N(2|10|3) eine leckere Taubnessel erblickt und einen geradlinigen Abstecher dorthin macht. Max ist durch etwas anderes abgelenkt und behält seine Flugbahn bei. Berechne den Abstand der beiden Flugbahnen. (3)

g) Max hat Heinrich längst vergessen, denn er muss sich nun vor Arabella in Sicherheit bringen. Arabella ist eine junge Schwalbe, die auf geradlinigem Kurs a: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -10 \\ -24 \\ 24 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ unterwegs ist, als sie zum Zeitpunkt t = 1 Sekunden Max erblickt und sich in die Kurve legt, um die Libelle im Punkt T(1|8|4) zu erwischen. Bestimme die Koordinatenform der Gleichung ihrer Flugebene E, die durch ihre bisherige Flugbahn und den Punkt T festgelegt wird. (2)

h) Bestimme Arabellas Geschwindigkeit und den Neigungswinkel ihrer Flugebene zur Horizontalen. (2)

i) Arabella fliegt mit 15 m/s einen Halbkreis, der in A(−19|−12|24) beginnt und in T(1|8|4) enden soll. Wann kommt sie in T an?

j) Bestimme die Gleichung der Kugel, deren Schnitt mit der Flugebene E den Halbkreis beschreibt. (2)

k) Nachdem sie Max im Punkt T nicht erwischt hat, fängt sich Arabella ab, indem sie noch einen Viertelkreis auf der gleichen Kreisbahn fliegt und diese dann auf der Tangente geradlinig verlässt. Bestimme die Gleichung dieser Tangente. (2)

Lösungen:

a) h = $\sqrt{340} - 17 \approx 1{,}44$ m. (1)

b) Die Laubkugel hat das Zentrum Z(0|4|3) Die genau darunter liegende Wurzel hat dann die Koordinaten W(0|4|x_3). Setzt man $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ in die Gleichung für den Hügel ein, so erhält man $x_3 = 1$ und damit W(0|4|1). (2)

c) h: $\vec{x}(t) = \overrightarrow{OP} + t\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2)

d) Er ist nach t = 4 Sekunden dort. (1)

e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 3$. Sie werden sich also t = 3 Sekunden nach Heinrichs Abflug und t’ = 2 Sekunden nach Max’ Abflug im Punkt P(1|8|4) treffen. (2)

Max’ Geschwindigkeit ist $\sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}\ \frac{m}{s} \approx 5{,}39$ m/s (1)

f) Die neue Flugbahn von Heinrich ist h’: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} + t''\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit t’’ = t − 2. (1)

Mit dem gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Differenz $\overrightarrow{MH'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ zweier Ortsvektoren von Max und Heinrich ergibt sich der Abstand d = $\frac{\overrightarrow{MH'} * \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{33}}{3}$ m ≈ 1,91 m. (2)

g) E: $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56$ (2)

h) $v = \sqrt{9^2+12^2+0^2} = 15$ m/s und $\alpha = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{74}} = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \approx 35{,}53°$ (2)

i) Der Radius des Halbkreises ist $\frac{1}{2}\overline{AT} = \frac{1}{2}\sqrt{20^2+20^2+20^2} = \sqrt{3}\cdot 10$ m. (1)

Mit der Bogenlänge $b = \pi r = \pi\sqrt{3}\cdot 10$ m ≈ 54,41 m erhält man die Flugdauer $t_0 = \frac{b}{v} = \pi\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} \approx 3{,}63$ Sekunden. Arabella kommt also 1,63 Sekunden später als Max in T an. (1)

j) Für dem Mittelpunkt M erhält man aus $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AT}$ die Koordinaten M(−9|−2|14). (1)

Mit dem Radius $r = \sqrt{3}\cdot 10$ ergibt sich K: $(x_1+9)^2 + (x_2+2)^2 + (x_3-14)^2 = 300$. (1)

k) Der Berührpunkt B der Tangente liegt in der Entfernung r = $\sqrt{3}\cdot 10$ vom Mittelpunkt M(−9|−2|14) in entgegengesetzter ursprünglicher Flugrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man erhält also $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} - \frac{r}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}\cdot 10}{15}\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor ist $\frac{|\vec{v}|}{|\overrightarrow{TA}|}\overrightarrow{TA} = \frac{15}{20\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} = 5\cdot\sqrt{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Tangente ist also t: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t''\cdot 5\cdot\sqrt{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2)