8.3. Komplexe Zahlen

Wie bereits in 8.1. dargestellt, wurde die fortlaufende Erweiterung der Zahlbereiche durch die Einführung immer komplexerer Rechenoperationen notwendig:

1. Auf den natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ führte der Wunsch nach **inversen Elementen bezüglich der Addition** zur Einführung der **negativen Zahlen** und damit zur Erweiterung auf die Menge der **ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.**
2. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ führte der Wunsch nach **inversen Elementen bezüglich der Multiplikation** zur Einführung der **Bruchzahlen** und damit zur Erweiterung auf die Menge der **rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.**

Auch der Körper der rationalen Zahlen weist aber noch Unvollständigkeiten auf:

8.3.1. Teilen durch die Null

Es gibt zum neutralen Element 0 der Addition **kein inverses Element 0^{-1} der Multiplikation.** Die Schwierigkeiten ergeben sich daraus, dass 0^{-1} „unendlich groß“ sein müsste: $0^{-1} = \infty$. Da die Unendlichkeit aber ziemlich unbestimmt ist, sind auch die Ergebnisse beim Rechnen mit ∞ unbestimmt, d.h. nicht mehr **wohl definiert**. Z.B. erhält man aus der Gleichung $0\cdot\infty = 1$ den **Widerspruch** $1 = 0\cdot\infty = (0 + 0)\cdot\infty = 0\cdot\infty + 0\cdot\infty = 1 + 1 = 2$. Da wohl definierte Rechnungen mit unendlich großen Zahlen nicht möglich sind, wird in der Körperdefinition auch kein inverses Element der Null bezüglich der Multiplikation verlangt.

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 1

Gibt man den Anspruch auf exakte Rechnungen auf und beschränkt sich auf (**topologische**) Abstandsbetrachtungen, so lässt sich der unendlich weit entfernte „Rand“ oder „Abschluss“ der rationalen oder Zahlen allerdings tatsächlich beschreiben.

Die einfachste Version ist die **Alexandroff-Kompaktifizierung** durch Hinzufügung eines einzigen unendlich fernen Punktes ∞. Wegen seiner Unbestimmtheit kann man mit diesem Punkt aber nicht rechnen und die Alexandroff-Kompaktifizierung ist auch keine Einbettung, d.h., stetige unbeschränkte Funktionen lassen sich nicht immer stetig in diesen Punkt fortsetzen.

Die nächst bessere Beschreibung der Unendlichkeit durch die **Stone-Čech-Kompaktifizierung** ist aber schon so abstrakt und benötigt so **viele** unendlich große „Zahlen“, dass sie für die Anwender der Mathematik praktisch keine Bedeutung besitzt. Außerdem sind mit den unendlich weit entfernten „Zahlen“ auf dem Rand wieder keine exakten Rechnungen mehr möglich: die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist ebenfalls kein Körper. Die einfachste Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ hat $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ Elemente, wobei $\mathbb{R}$ alleine schon $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Elemente besitzt!

8.3.2. Wurzeln positiver Zahlen

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht **algebraisch abgeschlossen**: Quadratische Gleichungen mit rationalen Zahlen haben Lösungen mit Wurzeln, die keine rationale Zahlen mehr sind.

Beispiel:
Die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist keine rationale Zahl.

Beweis:

Gäbe es nämlich einen **gekürzten** Bruch mit zwei **teilerfremden** ganzen Zahlen a und b, so dass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, so folgte $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$. Der Faktor 2 wäre also in $a^2 = a\cdot a$ und damit in a enthalten. Wegen der **Teilerfremdheit** wäre er dann aber nicht in b enthalten. Das Produkt $a^2 = a\cdot a$ enthält also nur **genau einmal** den Faktor 2. In der **Quadratzahl** a^2 müssen aber alle Faktoren **doppelt** auftreten. Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ führt also zu einem offensichtlichen **Widerspruch** und ist demnach falsch.

Um nun doch mit Wurzeln rechnen zu können, gibt man den Anspruch **absoluter Exaktheit** auf und versucht es **näherungsweise** z.B. mit dem folgenden, schon den **Sumerern** (4000 v. Chr.) bekannten Verfahren:

Satz:

Die Folge (a_n) mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{2}{a_n} + a_n)$ und $a_0 = 2$ liefert rationale Zahlen, die mit beliebiger Genauigkeit an $\sqrt{2}$ herankommen: $a_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$ oder in Limesschreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Für jede noch so kleine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass die Abweichung $|a_n^2 - 2| < \varepsilon$ ist.

Beweis:

1. Die Folge ist nach **unten beschränkt**: $a_n^2 > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}(\frac{2}{a_n} + a_n)^2 - 2 && \text{| 1. binomische Formel} \\ &= \frac{1}{a_n^2} + 1 + \frac{a_n^2}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{a_n^2} - 1 + \frac{a_n^2}{4} && \text{| 2. binomische Formel} \\ &= \frac{1}{4}(\frac{2}{a_n} - a_n)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann man auch schreiben $a_n^2 - 2 > 0$ bzw. $a_n^2 > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Die Folge ist **streng monoton fallend**: $a_{n+1}^2 < a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &= \frac{1}{a_n^2} \cdot \frac{1}{4}(\frac{2}{a_n} + a_n)^2 && \text{| 1. binomische Formel} \\ &= \frac{1}{a_n^2} \cdot (\frac{1}{a_n^2} + 1 + \frac{a_n^2}{4}) && \text{| ausmultiplizieren} \\ &= \frac{1}{a_n^4} + \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{4} && \text{| } a_n^2 > 2 \text{ bzw. } a_n^4 > 4 \text{ wegen 1.} \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet $a_{n+1}^2 < a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Für jede noch so kleine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass die Abweichung $|a_n^2 - 2| < \varepsilon$ ist:

Wegen
$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}(\frac{2}{a_n} - a_n)^2 && \text{| auf gleichen Nenner bringen} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2 - a_n^2}{a_n}\right)^2 && \text{| da Quadrate immer positiv sind, ist } (2 - a_n^2)^2 = (a_n^2 - 2)^2 \\ &= \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} \end{aligned}$$

folgt
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2 - 2}{a_n^2 - 2} &= \frac{a_n^2 - 2}{4a_n^2} && \text{| } a_n^4 > 2 \text{ wegen 1.} \\ &< \frac{a_n^2 - 2}{8} && \text{| } a_n \text{ ist streng monoton fallend mit } 1 < a_n < 2 \text{ wegen 1. und 2.} \\ &< \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Die Abweichung $|a_n^2 - 2|$ schrumpft also mit jedem Schritt **exponentiell** um den Faktor $\frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} |a_n^2 - 2| &< \frac{1}{8}\cdot|a_{n-1}^2 - 2| \\ &< \frac{1}{8^2}\cdot|a_{n-2}^2 - 2| \\ &< \\ &\dots \\ &< \frac{1}{8^n}\cdot|a_0^2 - 2| \\ &= \frac{1}{8^n}. \end{aligned}$$

Für $\frac{1}{8^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 8^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow -n\ln(8) < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln 8}$ ist dann auch $|a_n^2 - 2| < \frac{1}{8^n} < \varepsilon$, qed.

Die **Wurzeln beliebiger positiver rationaler Zahlen** $a \in \mathbb{Q}^+$ lassen sich durch entsprechende Folgen (oder auch mittels **Intervallschachtelung**) in beliebiger Genauigkeit annähern: $\sqrt{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{a}{a_n} + a_n)$ und $a_0 = a$. Alle Folgenglieder a_n sind rationale Zahlen, aber der Grenzwert $\sqrt{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ selbst ist unerreichbar.

Es lässt sich aber zeigen, dass man mit diesen abstrakten Grenzwerten genauso rechnen kann wie mit rationalen Zahlen. Man nennt diese **Grenzwerte von konvergenten (Cauchy-)Folgen rationaler Zahlen** daher auch **irrationale Zahlen.** Sie lassen sich als **nicht abbrechende und nichtperiodische Dezimalzahlen** darstellen.

Die rationalen Zahlen werden durch die irrationalen Zahlen zur Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ erweitert. Da man mit irrationalen Zahlen genauso rechnen kann wie mit rationalen Zahlen, sind die reellen Zahlen tatsächlich wieder ein **Körper**! (Sie sind sogar ein **topologisch vollständiger Körper**, d.h., sie enthalten nicht nur die Grenzwerte rationaler Cauchy-Folgen sondern auch die Grenzwerte reeller Cauchy-Folgen.)

Das Rechnen mit Wurzeln in Form von irrationalen Grenzwerten wird allerdings erkauft mit einer **Aufweichung der Wohldefiniertheit (vergleiche 8.3.1.)**: **Niemand wird jemals den genauen Wert von $\sqrt{2}$ wissen** oder berechnen können. Für **praktische Zwecke** reicht die übliche Näherung des Taschenrechners auf 10 Nachkommastellen aber völlig aus.

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 2

8.3.3. Wurzeln negativer Zahlen

Die reellen Zahlen sind aber leider immer noch nicht **algebraisch abgeschlossen**, da sich Wurzeln negativer reeller Zahlen nicht wieder als reelle Zahlen darstellen lassen. Z.B. hat die Gleichung $x^2 = -2$ keine reelle Lösung. Die Lösung dieses Problems ist aber mit Abstand die einfachste und wurde lange vor der Kompaktifizierung und Vervollständigung der rationalen Zahlen u. a. von **Leonhard Euler** (1707 – 1783) entdeckt: Er führte die **imaginäre Zahl i :=** $\sqrt{-1}$ ein und zeigt, dass sich damit (fast, siehe 8.3.4) ungehindert nach den gewohnten Regeln rechnen lässt:

1. Summen mit Wurzeln lassen sich nicht weiter zusammenfassen: $5 + \sqrt{-1} = 5 + i$ muss so stehen bleiben!
2. Produkte lassen sich zusammenfassen: $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{5}\cdot i$
3. Teilweises Wurzelziehen: $\sqrt{-25} = 5\cdot\sqrt{-1} = 5\cdot i$
4. Nenner rational machen: $\frac{2}{\sqrt{-5}} = \frac{2\cdot\sqrt{-5}}{-5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot i$

Die **reellen Zahlen a** $\in \mathbb{R}$ werden durch die **imaginären Zahlen bi mit y** $\in \mathbb{R}$ zu den **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ erweitert. Da sich die Summe einer reellen Zahl und einer Wurzel nicht weiter zusammenfassen lässt, haben alle komplexen Zahlen die Form **z = a + bi** einer Summe aus einem **Realteil a = Re(z)** und einem **Imaginärteil b = Im(z)** mit a, b $\in \mathbb{R}$. Beim Rechnen verwendet man die gewohnten Regeln und ordnet das Ergebnis wieder nach Realteil und Imaginärteil. Bei Multiplikation und Division wird dazu die Eigenschaft $i^2 = -1$ benutzt:

1. Addition: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + y_2)i$.
2. Subtraktion: $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - y_2)i$.
3. Multiplikation: $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.
4. Division: Um den Nenner wurzelfrei zu machen, erweitert man mit der **komplex konjugierten Zahl** $\bar{z} = a - bi$ und nutzt die 3. binomische Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+bi} &= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 3

Beispiel:

Berechne den Ausdruck $z_1 + \frac{z_2}{z_3}$ für $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$ und $z_3 = 4 - 2i$.

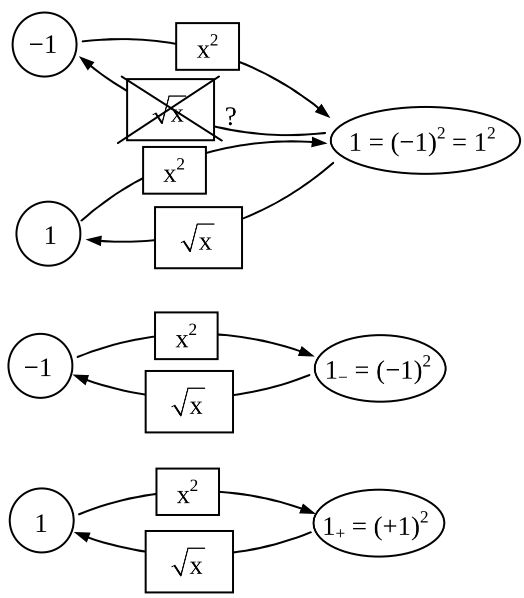
Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{z_2}{z_3} &= 1 - i + \frac{3+2i}{4-2i} && \text{| Nenner wurzelfrei machen durch Erweitern mit } \overline{z_3} = 4 - 2i \\ &= 1 - i + \frac{(3+2i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} && \text{| ausmultiplizieren und ordnen} \\ &= 1 - i + \frac{(12-4)+(8+6)i}{4^2+2^2} && \text{| Real- und Imaginärteil trennen} \\ &= 1 - i + \frac{8}{20} + \frac{14}{20}i && \text{| zusammenfassen} \\ &= 1{,}4 - 0{,}3i \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 4

8.3.4. Die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzel

Die Verwendung der Eulerschen Schreibweise für die imaginäre Einheit i setzt die **Eindeutigkeit** des Radizierens als **Umkehrung** des Quadrierens voraus: $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{(-1)^2} = -1$. Beim Radizieren muss in **Erinnerung** behalten werden, aus welcher der beiden möglichen reellen Wurzeln +1 oder −1 das Quadrat $1 = 1^2 = (-1)^2$ ursprünglich entstanden war! In der bisher üblichen Weise würde die **Entstehungsgeschichte** einer Zahl beim Radizieren aber nicht weiter beachtet werden und man rechnete einfach: $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$! Um also die Eulersche Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ ungestraft verwenden zu können, muss man in der Lage sein, für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ zu entscheiden, ob sie das Quadrat zwei negativer oder zweier positiver Wurzeln ist, d.h., ob $z = \zeta^2$ oder ob $z = (-\zeta)^2$ für ein $\zeta \in \mathbb{C}$. Das ist tatsächlich möglich durch die die Auffächerung der **komplexen Zahlenebene (siehe 8.4)** in eine doppelt so große **Riemannsche Fläche (siehe 8.5)**, in der nun jede bisherige komplexe Zahl z zweimal erscheint als $z_+ = \zeta^2$ oder $z_- = (-\zeta)^2$ für ein gemeinsames $\zeta \in \mathbb{C}$.



Möchte man sich die Erweiterung der komplexen Zahlen auf die entsprechende Riemannsche Fläche ersparen, so muss man auf die Eulersche Definition i = $\sqrt{-1}$ **verzichten** und die imaginäre Einheit **indirekt** definieren mittels $i^2 := -1$. **Wurzeln negativer reeller Zahlen** −a mit a > 0 leitet man dann nicht wie in 8.3.1 aus der Eulerschen Definition her mittels $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)\cdot a} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a} = i\sqrt{a}$ sondern **definiert** einfach $\sqrt{-a} := i\sqrt{a}$. Ob man die für alle praktischen Rechnungen ausreichenden Gleichungen $i^2 = -1$ und $\sqrt{-a} := i\sqrt{a}$ nun einfach **definiert** oder unter Rückgriff auf Riemannsche Flächen aus der Eulerschen Definition i = $\sqrt{-1}$ **herleitet**, ist letztlich Geschmackssache und für die Praxis unerheblich!

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 5

8.3.5. Quadratische Gleichungen

Beispiel 1:

Gib die Lösungsmenge der Gleichung $z^2 - 4z + 7 = 0$ auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen an.

Lösung

Mit der p-q-Formel erhält man $z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm \sqrt{3}\,i$.

Beispiel 2:

Gib die Lösungsmenge der Gleichung $z^2 - (4 + 2i)z + (7 - 3i) = 0$ auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen an.

Lösung

Mit der p-q-Formel erhält man

$z_{1/2} = 2 + i \pm \sqrt{(2+i)^2-(7-3i)} = 2 + i \pm \sqrt{(4+4i-1)-(4-3i)} = 2 + i \pm \sqrt{-1-7i}$.

Gemäß der Forderung nach algebraische Abgeschlossenheit sollte es möglich sein, auch Wurzeln mit **komplexen Radikanden** wie z.B. $\sqrt{-1-7i}$ wieder als komplexe Zahlen darzustellen. Diese und viele andere Rechnungen werden durch die **geometrische Deutung** der komplexen Zahlen in der **komplexen Zahlenebene** und die Verwendung von **Polarkoordinaten** stark vereinfacht und daher in Abschnitt 8.4 behandelt.

Übungen: Aufgaben zu komplexen Zahlen Nr. 6