8.4. Aufgaben zur komplexen Zahlenebene

Aufgabe 1
Stelle die folgenden Summen durch eine Vektorkette in der komplexen Zahlenebene dar:
a) $(2 + 3i) + (1 + 2i)$ b) $(2 - 3i) + (3 + 5i)$
c) $(1 + 2i) + (2 + i) + (1 - 1)$ d) $(1 + 2i) - (2 + i) - (1 + i)$

Aufgabe 2
Zeichne die Dreiecke mit den Ecken z_1, z_2 und z_3 in die komplexe Zahlenebene und berechne die Längen ihrer Seiten:
a) $z_1 = 0$; $z_2 = 3i$ und $z_3 = 4$ b) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 - i$ und $z_3 = 2 + 5i$ c) $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = -2 - i$ und $z_3 = 2 - i$

Aufgabe 3
Veranschauliche die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ durch eine Zeichnung. In welchen Fällen gilt Gleichheit?

Aufgabe 4
Stelle die folgenden Zahlen in Polarform dar:
a) 1 b) -1 c) i d) $1 + i$ e) $1 - i$
f) $3 + i\sqrt{3}$ g) $\sqrt{3} - i$ h) $-1 - i\sqrt{3}$ i) $0{,}6 - 0{,}8i$ k) $-7 - 3i$

Aufgabe 5
Stelle die folgenden Zahlen in kartesischer Form dar:
a) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}(\frac{\pi}{4})$ b) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}(\frac{7\pi}{4})$ c) $\sqrt{3}\cdot\text{cis}(\frac{4\pi}{3})$ d) $\sqrt{3}\cdot\text{cis}(\frac{2\pi}{3})$
e) $2\cdot\text{cis}(\frac{3\pi}{4})$ f) $2\cdot\text{cis}(-\frac{3\pi}{4})$ g) $3\cdot\text{cis}(70°)$ h) $3\cdot\text{cis}(290°)$

Aufgabe 6
Berechne das Produkt $z_1\cdot z_2$ jeweils in kartesischer und in Polarform.
a) $z_1 = \sqrt{3} - i$ und $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$ b) $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ und $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ c) $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 - 4i$

Aufgabe 7
Berechne die Potenzen z^1, z^2, z^3, z^4 und z^5. Beschreibe die dabei entstehende Figur in der komplexen Zahlenebene.
a) $z = \sqrt{2} + i$ b) $z = \sqrt{2} - i$ c) $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ d) $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$ e) $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

Aufgabe 8
Bestimme den Realteil und den Imginärteil der Potenzen $(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^n$ durch Ausmultiplizieren. Verwende dann die Eulersche Identität $(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^n = e^{in\alpha} = \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha)$ zum Beweis der folgenden Addtionstheoreme:
a) $n = 2$: $\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2$ und $\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$
b) $n = 3$: $\cos(3\alpha) = 4(\cos(\alpha))^3 - 3\cdot\cos(\alpha)$ und $\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot(\sin(\alpha))^3$. Hinweis: Setze $(\cos(\alpha))^2 + \sin(\alpha))^2 = 1$ ein.

Aufgabe 9
Berechne den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ für die Zahlen z_1 und z_2 aus Aufgabe 6 jeweils in kartesischer und in Polarform.

Aufgabe 10
Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ und stelle sie in der komplexen Zahlenebene dar
a) $z^2 = 4i$ b) $z^2 = -4i$ c) $z^2 = -4$ d) $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$ e) $z^2 = 2\sqrt{2} - i\cdot 2\sqrt{2}$ f) $z^2 = -2 - 5i$

Aufgabe 11
Gib die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ an:
a) $z^2 + 2z + i = 0$ b) $z^2 - (1 - i)z + 1 - 2i = 0$ c) $z^2 + (2 + 2i)z + 4 - 2i = 0$

Aufgabe 12
Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ und stelle sie in der komplexen Zahlenebene dar
a) $z^2 = 1$ b) $z^3 = 1$ c) $z^4 = 1$ d) $z^5 = 1$ e) $z^2 = i$ f) $z^3 = i$ g) $z^4 = i$

h) $z^3 = 1 + i$ i) $z^3 = 1 - i$ j) $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ k) $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$ l) $z^5 = -\sqrt{3} + i$ m) $z^5 = -\sqrt{3} - i$

Lösungen zu den Aufgaben zur komplexen Zahlenebene

Aufgabe 1

a) $3 + 5i$ b) $5 + 2i$

c) $4 + 2i$ d) -2

Aufgabe 2

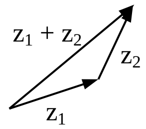
a) $|z_2 - z_1| = 3$; $|z_3 - z_2| = 5$ und $|z_1 - z_3| = 4$

b) $|z_2 - z_1| = 2$; $|z_3 - z_2| = \sqrt{37}$ und $|z_1 - z_3| = \sqrt{17}$

c) $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = -2 - i$ und $z_3 = 2 - i$: $|z_2 - z_1| = 5\sqrt{2}$; $|z_3 - z_2| = 4$ und $|z_1 - z_3| = \sqrt{26}$

Aufgabe 3

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = k\cdot z_2$ für ein $k \in \mathbb{R}$, d.h., wenn z_1 und z_2 parallel sind:



Aufgabe 4

a) $1\cdot\text{cis}(0)$ b) $1\cdot\text{cis}(180°)$ c) $1\cdot\text{cis}(90°)$ d) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}(45°)$ e) $1\cdot\text{cis}(315°)$

f) $2\sqrt{3}\cdot\text{cis}(30°)$ g) $2\cdot\text{cis}(330°)$ h) $2\cdot\text{cis}(240°)$ i) $1\cdot\text{cis}(316{,}77°)$ k) $\sqrt{58}\cdot\text{cis}(201{,}2°)$

Aufgabe 5

a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

e) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ f) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ g) $1{,}03 + 2{,}82i$ h) $1{,}03 - 2{,}82i$

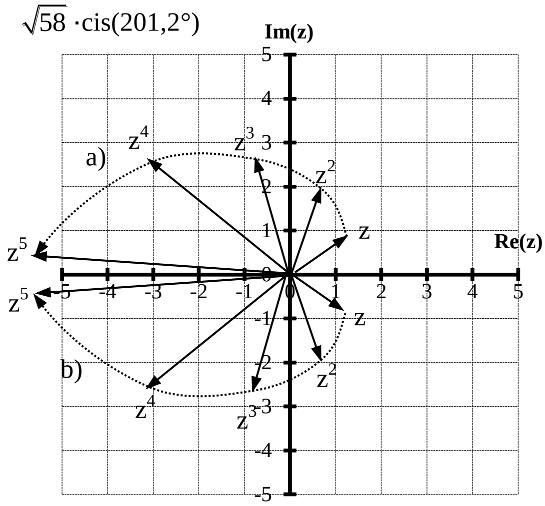
Aufgabe 6

a) $z_1\cdot z_2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\cdot\text{cis}(30°)$

b) $z_1\cdot z_2 = 1 = 1\cdot\text{cis}(0°)$

c) $z_1\cdot z_2 = 11 + 2i = 5\sqrt{5}\cdot\text{cis}(10{,}30°)$

Aufgabe 7



a) $z = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 35,3°}$; $z^2 = 2\cdot e^{i70,5°}$; $z^3 = 2\sqrt{2}\cdot e^{i105,8°}$, $z^4 = 4\cdot e^{i141,0°}$; $z^5 = 4\sqrt{2}\cdot e^{i176,3°}$
(gegen den Uhrzeigersinn in 35,5°-Schritten auseinanderlaufende Spirale)

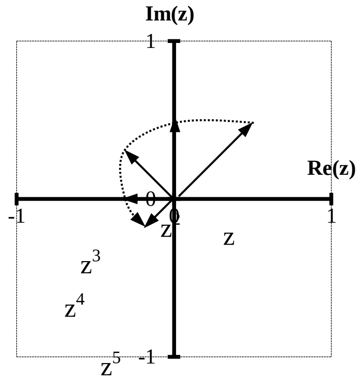
b) $z = \sqrt{2}\cdot e^{-i35,3°}$; $z^2 = 2\cdot e^{-i70,5°}$; $z^3 = 2\sqrt{2}\cdot e^{-i105,8°}$, $z^4 = 4\cdot e^{-i141,0°}$; $z^5 = 4\sqrt{2}\cdot e^{-i176,3°}$
(mit dem Uhrzeigersinn in 35,5°-Schritten auseinanderlaufende Spirale)

c) $z = 1\cdot e^{i\cdot 60°} \Rightarrow z^2 = 1\cdot e^{i120°}$; $z^3 = 1\cdot e^{i180°}$, $z^4 = 1\cdot e^{i240°}$ und $z^5 = 1\cdot e^{i300°}$
(gegen den Uhrzeigersinn in 60°-Schritten laufender Kreis)

d) $z = 1\cdot e^{-i\cdot 30°} \Rightarrow z^2 = 1\cdot e^{-i60°}$; $z^3 = 1\cdot e^{-i90°}$, $z^4 = 1\cdot e^{-i120°}$ und $z^5 = 1\cdot e^{-i150°}$
(mit dem Uhrzeigersinn in 30°-Schritten laufender Kreis)

e) $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot e^{i45°}$; $z^2 = \frac{1}{2}\cdot e^{i90°}$; $z^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot e^{i135°}$, $z^4 = \frac{1}{4}\cdot e^{i180°}$; $z^5 = \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot e^{i225°}$
(gegen den Uhrzeigersinn in 45°-Schritten zusammenlaufende Spirale)

f)



Aufgabe 8

a) Durch Ausmultiplizieren erhält man $(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^2 = \underbrace{(\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2}_{} + \underbrace{i\cdot 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}_{}$

Aus der Eulerschen Identität erhält man $(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^2 = \cos(2\alpha) + i\cdot\sin(2\alpha)$

b) Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned}(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^3 &= [(\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 + i\cdot 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)]\cdot[\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)]\\ &= (\cos(\alpha))^3 - (\sin(\alpha))^2\cdot\cos(\alpha) - 2(\sin(\alpha))^2\cdot\cos(\alpha)\\ &\quad + i\cdot 2\cdot\sin(\alpha)\cdot(\cos(\alpha))^2 + i\cdot\sin(\alpha)\cdot(\cos(\alpha))^2 - i\cdot(\sin(\alpha))^3.\\ &= (\cos(\alpha))^3 - 3(\sin(\alpha))^2\cdot\cos(\alpha) + i\cdot[3(\cos(\alpha))^2\cdot\sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3]\end{aligned}$$

und mit $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$

$$\begin{aligned}(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^3 &= (\cos(\alpha))^3 - 3[1 - (\cos(\alpha))^2]\cdot\cos(\alpha)\\ &\quad + i\cdot[3[1 - (\sin(\alpha))^2]\cdot\sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3]\\ &= \underbrace{4(\cos(\alpha))^3 - 3\cdot\cos(\alpha)}_{} + \underbrace{i\cdot[3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot(\sin(\alpha))^3]}_{}\end{aligned}$$

Aus der Eulerschen Identität erhält man $(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^3 = \cos(3\alpha) + i\cdot\sin(3\alpha)$

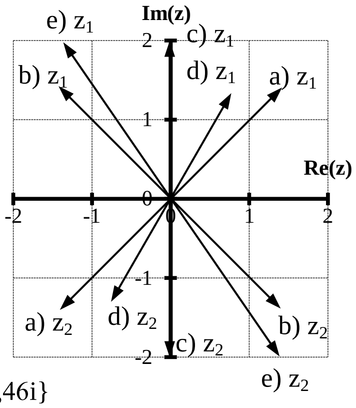
Die Additionstheoreme folgen jeweils aus der Gleichheit von Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 9

a) $z_1 = \sqrt{3} - i = 2\cdot\text{cis}(330°)$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(+60°) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 1\cdot\text{cis}(270°) = -i$

b) $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + i) = 1\cdot\text{cis}(45°)$ und $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 - i) = 1\cdot\text{cis}(-45°) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 1\cdot\text{cis}(90°) = i$.

c) $z_1 = 1 + 2i = \sqrt{5}\cdot\text{cis}(63{,}43°)$ und $z_2 = 3 - 4i = 5\cdot\text{cis}(306{,}87°) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\text{cis}(116{,}56°) = -0{,}2 + 0{,}40i$



Aufgabe 10

a) $z_1 = 2\cdot\text{cis}(45°) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(225°) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

b) $z_1 = 2\cdot\text{cis}(135°) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(315°) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

c) $z_1 = 2\cdot\text{cis}(90°) = 2i$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(270°) = -2i$.

d) $z_1 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\,i$ und $z_2 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(240°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\,i$

e) $z_1 \approx \sqrt[4]{29}\cdot\text{cis}(124{,}1°) \approx 1{,}30 - 1{,}92i$ und $z_2 \approx \sqrt[4]{29}\cdot\text{cis}(304{,}1°) \approx -1{,}30 + 1{,}92i$

Aufgabe 11

a) $z^2 + 2z + i = 0 \Rightarrow L = \{-1 \pm \sqrt{1-i}\} = \{-1 \pm 1{,}10 \mp 0{,}46i\} = \{0{,}10 - 0{,}46i; -2{,}10i + 0{,}46i\}$

b) $z^2 - (1 - i)z + 1 - 2i = 0 \Rightarrow L = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \pm \sqrt{-1+\frac{3}{2}i}\} = \{0{,}5 - 0{,}5i \pm 0{,}63 \pm 1{,}18i\} = \{-0{,}13 - 1{,}68i; 1{,}13 + 0{,}68i\}$

c) $z^2 + (2 + 2i)z + 4 - 2i = 0 \Rightarrow L = \{-1 - i \pm \sqrt{-4+4i}\} = \{-1 - i \pm 0{,}91 \pm 2{,}20i\} = \{-0{,}09 + 1{,}10i; -1{,}91 - 3{,}20i\}$

Aufgabe 12

a) $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$.

b) $z_1 = 1\cdot e^{i0°} = 1$; $z_2 = 1\cdot e^{i120°} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $z_3 = 1\cdot e^{i240°} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

c) $z_1 = 1\cdot e^{i0°} = 1$; $z_2 = 1\cdot e^{i90°} = i$; $z_2 = 1\cdot e^{i180°} = -1$ und $z_4 = 1\cdot e^{i270°} = -i$.

d) $z_1 = 1$; $z_2 = 1\cdot e^{i72°} \approx 0{,}31 + 0{,}95i$; $z_3 = 1\cdot e^{i144°} \approx -0{,}81 + 0{,}59i$, $z_4 = 1\cdot e^{i216°} \approx -0{,}81 - 0{,}59i$; $z_5 = 1\cdot e^{i288°} \approx 0{,}31 - 0{,}95i$

e) $z_1 = 1\cdot e^{i45°} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ und $z_2 = 1\cdot e^{i255°} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$

f) $z_1 = 1\cdot e^{i30°} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}$; $z_2 = 1\cdot e^{i150°} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}$ und $z_3 = 1\cdot e^{i270°} = -i$.

g) $z_1 = 1\cdot e^{i25{,}5°} \approx 0{,}90 + 0{,}43i$; $z_2 = 1\cdot e^{i115{,}5°} \approx -0{,}43 + 0{,}90i$; $z_3 = 1\cdot e^{i205{,}5°} \approx -0{,}90 - 0{,}43i$ und $z_4 = 1\cdot e^{i295{,}5°} \approx 0{,}43 - 0{,}90i$

h) $a = \sqrt{2}\cdot e^{i45°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i15°} \approx 1{,}08 + i\cdot 0{,}29$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i135°} \approx -0{,}79 + i\cdot 0{,}79$ und $z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{i255°} \approx -0{,}29 - i\cdot 1{,}08$.

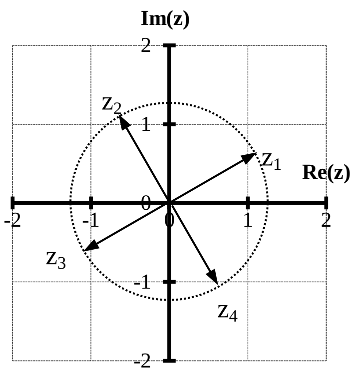
i) $a = \sqrt{2}\cdot e^{-i45°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{-i15°} \approx 1{,}08 - i\cdot 0{,}29$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{-i135°} \approx -0{,}79 - i\cdot 0{,}79$ und $z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{-i255°} \approx -0{,}29 + i\cdot 1{,}08$.

j) $a = 2\cdot e^{i60°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i15°} \approx 1{,}15 + i\cdot 0{,}31$; $z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i105°} \approx -0{,}31 + i\cdot 1{,}15$; $z_3 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i195°} \approx -1{,}15 - i\cdot 0{,}31$ und $z_4 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i285°} \approx -0{,}31 - i\cdot 1{,}15$

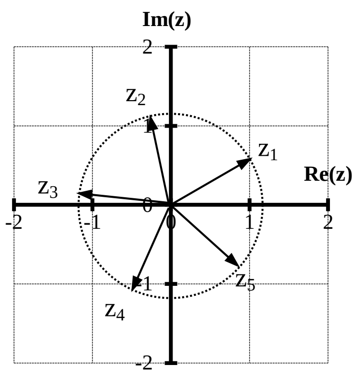
k) $a = 2\cdot e^{i120°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i30°} \approx 1{,}03 + i\cdot 0{,}59$; $z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i120°} \approx -0{,}59 + i\cdot 1{,}03$; $z_3 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i210°} \approx -1{,}03 - i\cdot 0{,}59$ und $z_4 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i300°} \approx 0{,}59 - i\cdot 1{,}03$.

l) $a = 2\cdot e^{i150°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i30°} \approx 0{,}99 + i\cdot 0{,}57$; $z_2 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i102°} \approx -0{,}24 + i\cdot 1{,}12$; $z_3 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i174°} \approx -1{,}14 + i\cdot 0{,}12$; $z_4 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i246°} = -0{,}47 - i\cdot 1{,}05$ und $z_5 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i318°} \approx 0{,}85 - i\cdot 0{,}77$.

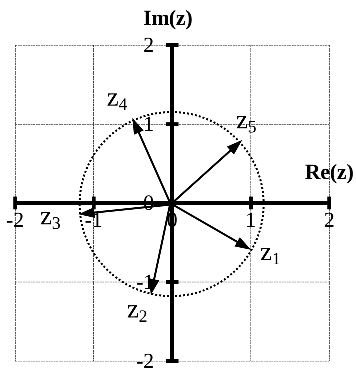
m) $a = 2\cdot e^{-i150°} \Rightarrow z_1 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{-i30°} \approx 0{,}99 - i\cdot 0{,}57$; $z_2 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{-i102°} \approx -0{,}24 - i\cdot 1{,}12$; $z_3 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{-i174°} \approx -1{,}14 - i\cdot 0{,}12$; $z_4 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{-i246°} = -0{,}47 + i\cdot 1{,}05$ und $z_5 = \sqrt[5]{2}\cdot e^{-i318°} \approx 0{,}85 + i\cdot 0{,}77$.



Aufgabe 12 k)



Aufgabe 12 l)



Aufgabe 12 m)