

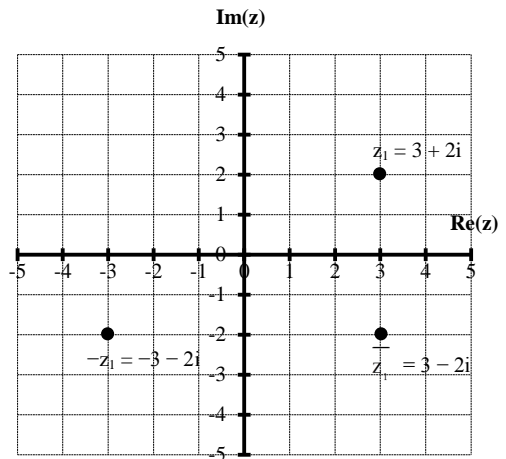
8.4. Die komplexe Zahlenebene

8.4.1. Kartesische Form und Addition komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahl $z = x + yi$ besteht aus zwei Komponenten $\operatorname{Re}(z) = x$ und $\operatorname{Im}(z) = y$ und lässt sich daher als **Punkt** $(x|y)$ in der **komplexen Zahlenebene** darstellen. (**Kartesische Darstellung** nach René Descartes 1596 - 1650, dem Erfinder des rechtwinkligen Koordinatensystems)

Die x-Achse wird zur **reellen Achse**, auf der alle reellen Zahlen $x + 0i$ liegen und die y-Achse zur **imaginären Achse**, auf der alle rein imaginären Zahlen $0 + yi$ liegen.

Aus z erhält man die **Gegenzahl** $-z$ durch **Spiegelung am Ursprung** und das **komplex konjugierte Element** \bar{z} durch **Spiegelung an der reellen Achse**.

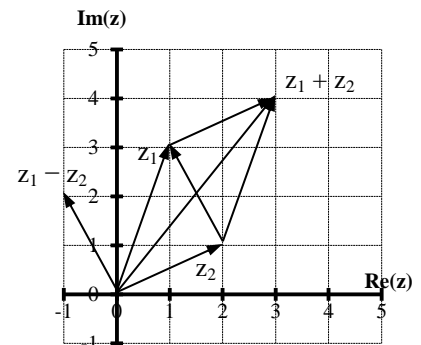


Die komponentenweise **Addition** komplexer Zahlen entspricht dem **Hintereinanderlegen** der entsprechenden **Ortsvektoren**.

Bei der **Subtraktion** wird die Pfeilrichtung des Subtrahenden umgedreht: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Durch Addition und Subtraktion erhält man so die beiden **Diagonalen** des von z_1 und z_2 aufgespannten **Parallelogramms**:

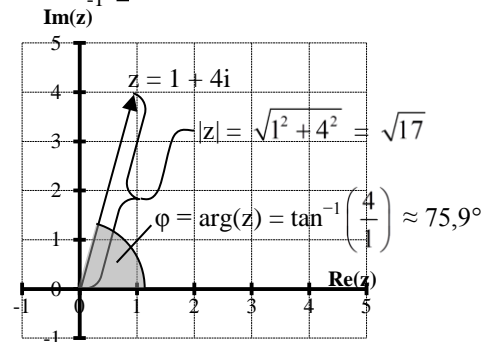
Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 1



8.4.2. Polarform komplexer Zahlen

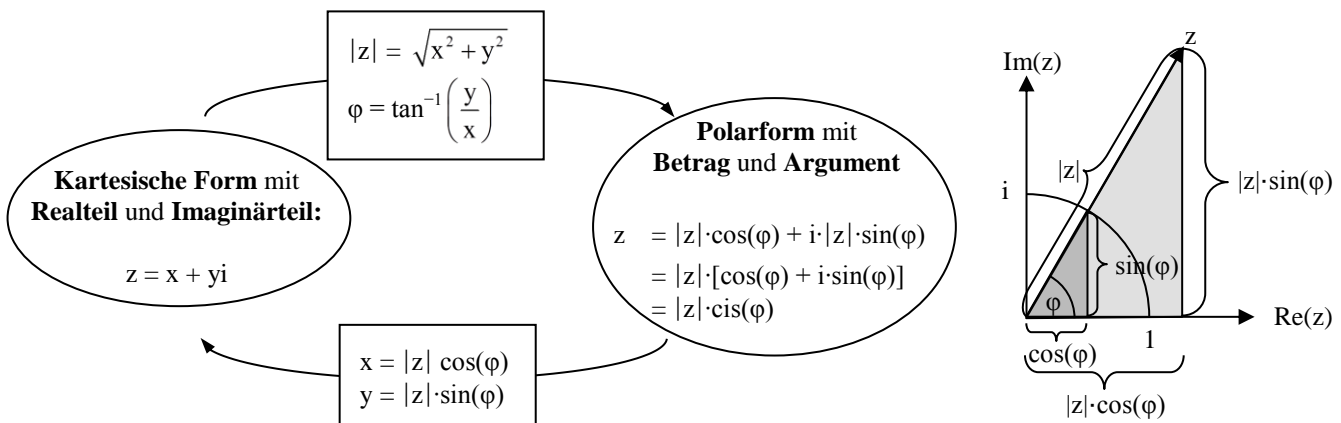
Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = x + yi$ ist die Länge ihres Ortsvektors und berechnet sich nach **Pythagoras** zu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Das **Argument** einer komplexen Zahl $z = x + yi$ ist definiert als der Winkel φ zwischen ihrem Ortsvektor und der positiven reellen Achse. Es lässt sich daher mit dem **Tangens** berechnen zu $\varphi = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 2 und 3

Eine komplexe Zahl z lässt sich damit auf zwei verschiedene Arten eindeutig beschreiben:



Zur Abkürzung verwendet man dabei die **trigonometrische Summe** $\operatorname{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$. Das Argument $\varphi = \arg(z)$ bezieht sich auf einen **einfachen Umlauf in positiver Richtung** und ist daher zunächst (vgl. 8.3.4) beschränkt auf den Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$. Es kann sowohl in **Grad** als auch im **Bogenmaß** angegeben werden.

Beispiele für die Umrechnung kartesische Form → Polarform:

- $z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ und $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,3^\circ \Rightarrow z \approx \sqrt{13} \cdot \text{cis}(56,3^\circ)$
- $z = 4 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ und $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) \approx -36,9^\circ \Rightarrow z \approx 5 \cdot \text{cis}(-36,9^\circ) = 5 \cdot \text{cis}(323,1^\circ)$
- $z = 2i \Rightarrow |z| = 2$ und $\varphi = 90^\circ \Rightarrow z \approx 2 \cdot \text{cis}(90^\circ) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $z = -3 \Rightarrow |z| = 3$ und $\varphi = 180^\circ \Rightarrow z \approx 3 \cdot \text{cis}(180^\circ) = 3 \cdot \text{cis}(\pi)$

Beispiele für die Umrechnung Polarform → kartesische Form:

- $z = 4 \cdot \text{cis}(30^\circ) \Rightarrow x = 4 \cdot \cos(30^\circ) \approx 3,46$ und $y = 4 \cdot \sin(30^\circ) = 2 \Rightarrow z \approx 3,46 + 2i$
- $z = 3 \cdot \text{cis}(45^\circ) \Rightarrow x = 3 \cdot \cos(45^\circ) \approx 2,12$ und $y = 3 \cdot \sin(45^\circ) \approx 2,12 \Rightarrow z \approx 2,12 + 2,12i$
- $z = 2 \cdot \text{cis}(180^\circ) \Rightarrow x = 2 \cdot \cos(180^\circ) = -2$ und $y = 2 \cdot \sin(180^\circ) = 0 \Rightarrow z = -2$
- $z = 5 \cdot \text{cis}(270^\circ) \Rightarrow x = 5 \cdot \cos(270^\circ) = 0$ und $y = 5 \cdot \sin(270^\circ) = -5 \Rightarrow z = -5i$

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 4 und 5

8.4.3. Multiplikation komplexer Zahlen in Polarform

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert. Zur Herleitung dieser Eigenschaft verwenden wir aufgrund ihrer überragenden Bedeutung die **Eulersche Formel**, die einen erstaunlich einfachen Zusammenhang zwischen den **trigonometrischen Funktionen** und der **natürlichen Exponentialfunktion** auf der imaginären Achse beschreibt:

$$e^{\varphi i} = \text{cis}(\varphi)$$

Diese kleine Formel folgt ohne weiteres direkt aus der **Potenzreihenentwicklung** der drei Funktionen und ist zum großen Teil für den Erfolg der komplexen Zahlen verantwortlich. Da sie nur im **Bogenmaß** gültig ist, werden wir in der Rechenpraxis allerdings weiterhin meistens die **trigonometrische Summe** mit **Gradmaß** verwenden. Die Addition zweier Winkel bei der Multiplikation ist mit der Eulerschen Formel eine einfache Anwendung der **1. Potenzregel**:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot \text{cis}(\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot \text{cis}(\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot e^{\varphi_1 i} \cdot |z_2| \cdot e^{\varphi_2 i} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Beispiel mit $z_1 = 1,5 \cdot \text{cis}(60^\circ) \approx 0,75 + 1,30i$ und $z_2 = 2 \cdot \text{cis}(135^\circ) \approx -1,41 + 1,41i$

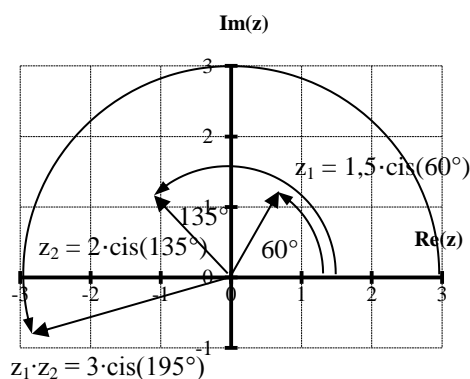
1. In kartesischen Koordinaten: mühsam und ungenau!

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &\approx (0,75 + 1,30i) \cdot (-1,41 + 1,41i) \\ &= (-1,06 - 1,82) + (1,06 - 1,82)i \\ &= -2,88 - 0,76i \\ &\approx 2,98 \cdot \text{cis}(194,8^\circ) \end{aligned}$$

2. In Polarkoordinaten: schnell und exakt!

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 1,5 \cdot \text{cis}(60^\circ) \cdot 2 \cdot \text{cis}(135^\circ) \\ &= 1,5 \cdot 2 \cdot \text{cis}(60^\circ + 135^\circ) \\ &= 3 \cdot \text{cis}(195^\circ) \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 6 - 8



8.4.4. Division komplexer Zahlen in Polarform

Man dividiert durch eine komplexe Zahl, indem man durch ihren Betrag teilt und ihren Winkel subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot \text{cis}(\varphi_1)}{|z_2| \cdot \text{cis}(\varphi_2)} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \text{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Beispiel mit $z_1 = 3 \cdot \text{cis}(195^\circ) \approx -2,90 - 0,78i$ und $z_2 = 2 \cdot \text{cis}(135^\circ) \approx -1,41 + 1,41i$

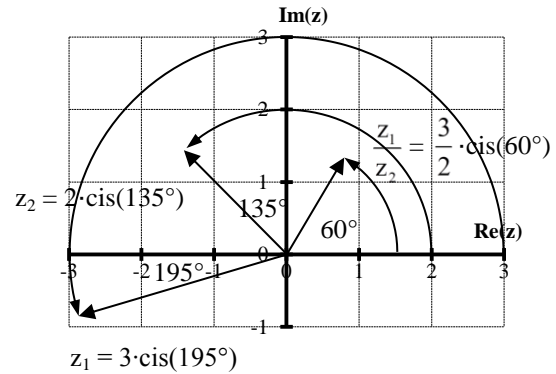
1. In kartesischen Koordinaten: mühsam und ungenau!

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \frac{-2,90 - 0,78i}{-1,41 + 1,41i} = \frac{(-2,90 - 0,78i)(-1,41 - 1,41i)}{(-1,41 + 1,41i)(-1,41 - 1,41i)}$$

$$\approx \frac{3,08 - 5,19i}{2 + 2} = 0,77 - 1,30i \approx 1,51 \cdot \text{cis}(59,35^\circ)$$

2. In Polarkoordinaten: schnell und exakt!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \cdot \text{cis}(195^\circ - 135^\circ) = 1,5 \cdot \text{cis}(60^\circ)$$



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 9

8.4.5. Quadratwurzeln komplexer Zahlen

Man zieht die Quadratwurzel einer komplexen Zahl, indem man ihren Betrag radiziert und ihren Winkel halbiert.

Die quadratische Gleichung $z^2 = a \in \mathbb{C}$ hat die beiden Lösungen $z_{1/2} = \pm \sqrt{a} = \sqrt{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + k\pi\right)$ mit $k = 0$ oder 1 ,

$$\text{denn } z_1^2 = |a| \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) = |a| \text{cis}(\varphi) = a$$

$$\text{und } z_2^2 = |a| \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + \pi + \frac{\varphi}{2} + \pi\right) = |a| \text{cis}(\varphi + 2\pi) = |a| \text{cis}(\varphi) = a$$

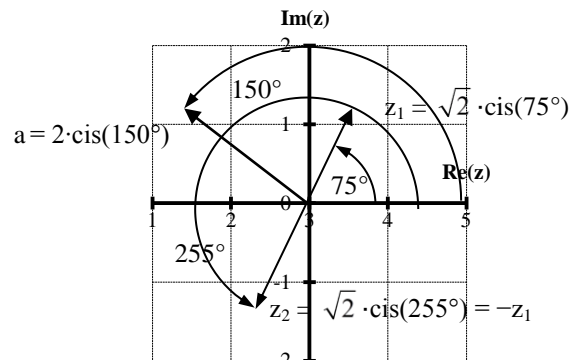
Beispiel:

Die Gleichung $z^2 = -\sqrt{3} + i = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ)$ hat im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ die Lösungen

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(75^\circ), \text{ denn } z_1^2 = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ) \text{ und}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(75^\circ + 180^\circ), \text{ denn } z_2^2 = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ + 360^\circ) = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ).$$

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 10 und 11



8.4.6. Höhere Wurzeln komplexer Zahlen

Man zieht die n-te Wurzel einer komplexen Zahl, indem man die n-te Wurzel des Betrages und den n-Teil ihres Winkels nimmt.

Die Gleichung $z^n = |a| \cdot \text{cis}(\varphi) \in \mathbb{C}$ hat im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ die n Lösungen $z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)$ mit $0 \leq k < n$,

$$\text{denn } z_k^n = |a| \cdot \text{cis}(\varphi + k \cdot 2\pi) = |a| \text{cis}(\varphi) = a \text{ für alle } k \text{ mit } 0 \leq k < n.$$

Beispiel:

Die Gleichung $z^3 = -\sqrt{3} + i = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ)$ hat die Lösungen

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}(50^\circ), \text{ denn } z_0^3 = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}(50^\circ + 120^\circ), \text{ denn } z_1^3 = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ + 360^\circ) = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ) \text{ und}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}(50^\circ + 240^\circ), \text{ denn } z_2^3 = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = 2 \cdot \text{cis}(150^\circ)$$

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr.12

