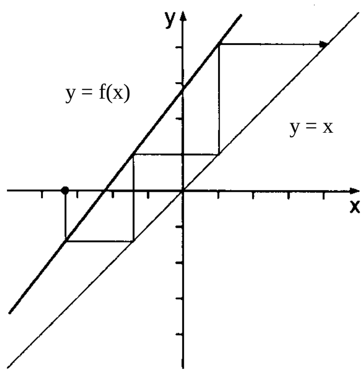
9.4. Lineare Iteration

9.4.1. Graphische Iteration

Die graphische Iteration einer Funktion besteht in der wiederholten Ausführung der beiden folgenden Schritte:

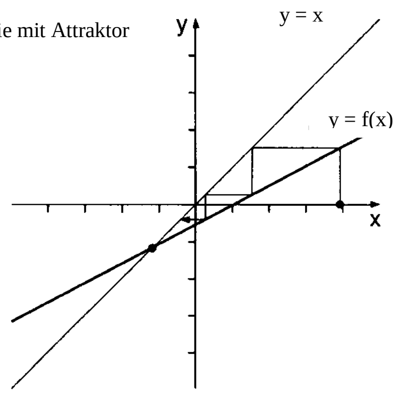
1. Gehe vom gegebenen Punkt aus senkrecht nach oben oder unten, bis du auf die Kurve y = f(x) triffst.
2. Gehe von der Kurve aus waagrecht nach links oder rechts, bis du auf die 1. Winkelhalbierende y = x triffst.

Solch eine wiederholte Ausführung der gleichen Rechnung jeweils mit dem Ergebnis der vorigen Rechnung nennt man auch **Iteration** (lat iter = Weg)
In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Iteration **linearer Funktionen** f(x) = ax + b.

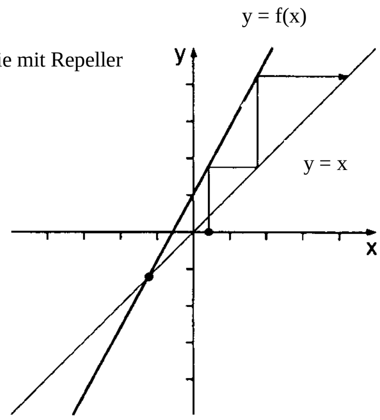


Startet man am Schnittpunkt der Kurve mit der 1.Winkelhalbierenden, so passiert nichts; diese Punkt nennt man daher **Fixpunkte**.
Bei manchen Geraden erhält man **Treppenlinien**, die vom Fixpunkt wegstreben (**konvergieren**). In diesem Fall wirkt der Fixpunkt als **Repeller** (lat. repellere = abstoßen). Bei anderen Geraden streben die Treppenlinien auf den Fixpunkt zu (sie **konvergieren**), er wirkt dann als **Attraktor** (lat attraktare = anziehen):

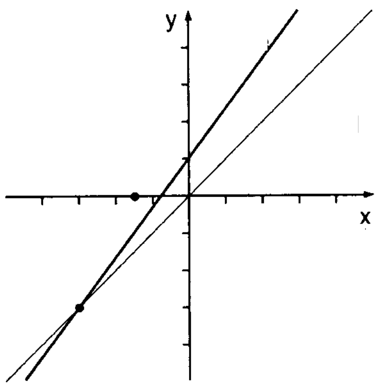
Treppenlinie mit Attraktor

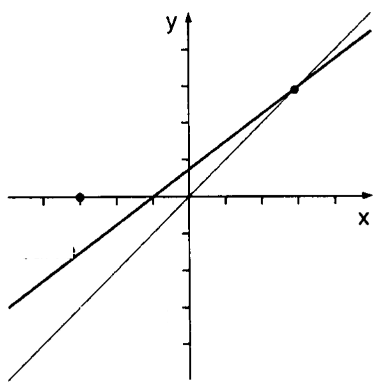


Treppenlinie mit Repeller

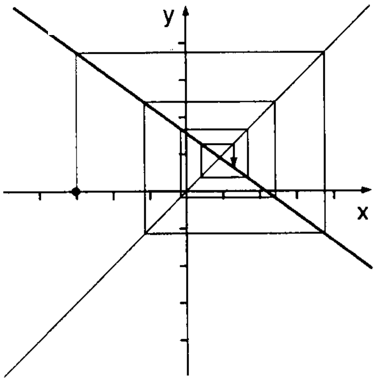


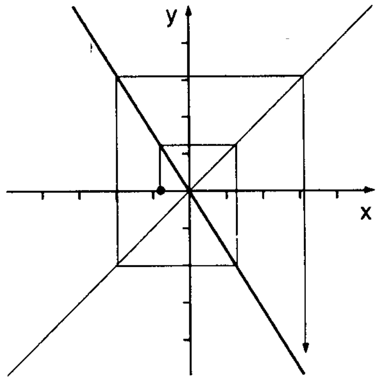
a) Zeichne die Iterationslinie vom markierten Startpunkt auf der x-Achse aus so weit wie möglich. Beschrifte den Fixpunkt als Attraktor bzw. Repeller.



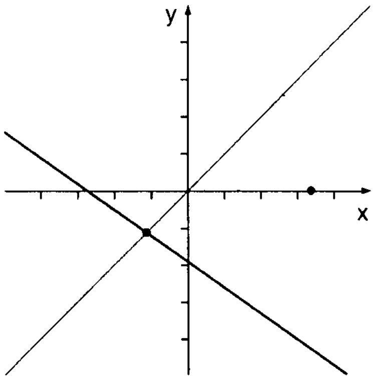


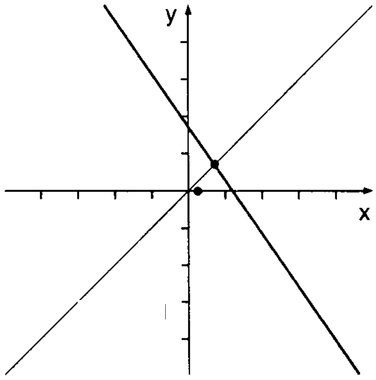
Bei anderen Geraden erhält man **Spiralen**, die zum Attraktor hin oder von Repeller weg streben:



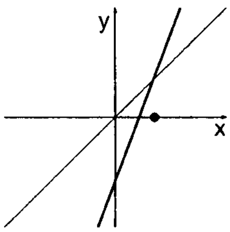


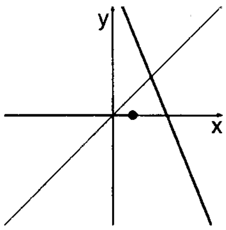
b) Zeichne die Iterationslinie vom markierten Startpunkt auf der x-Achse aus so weit wie möglich. Beschrifte den Fixpunkt als Attraktor bzw. Repeller.

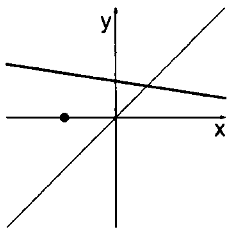


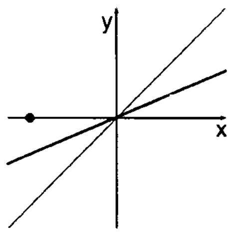


c) Entscheide anhand der Steigung der Gerade und ohne die Iterationslinie zu zeichne, ob man eine Spirale oder eine Treppenlinie mit Attraktor oder Repeller erhält:

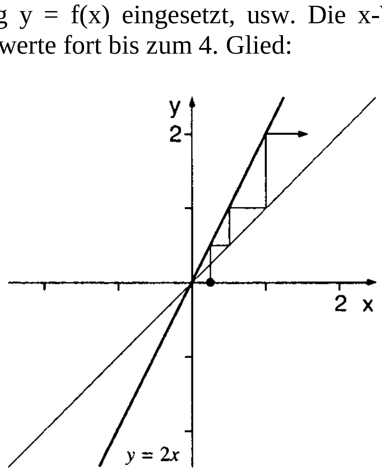


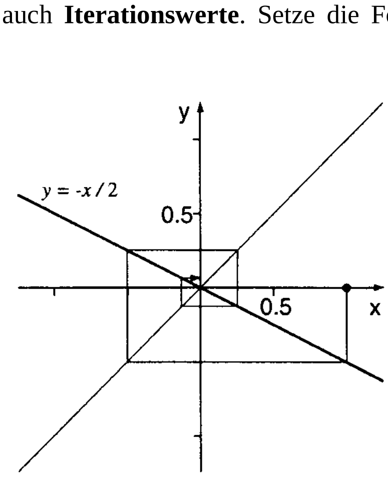






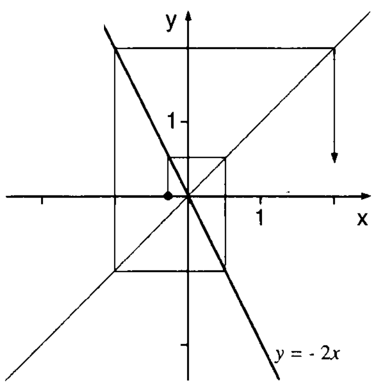
d) Rechnerisch wird der x-Wert des Startpunktes in die Gleichung y = f(x) eingesetzt, das Ergebnis y = x umgenannt, wieder in die Gleichung y = f(x) eingesetzt, das Ergebnis y = x umgenannt, wieder in die Gleichung y = f(x) eingesetzt, usw. Die x-Werte nennt man auch **Iterationswerte**. Setze die Folge der Iterationswerte fort bis zum 4. Glied:



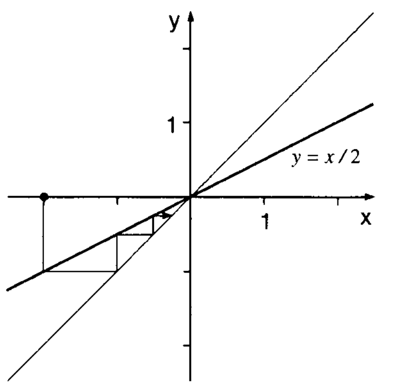


$1/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow$ ___ $\rightarrow$ ___

$1 \rightarrow -1/2 \rightarrow$ ___ $\rightarrow$ ___



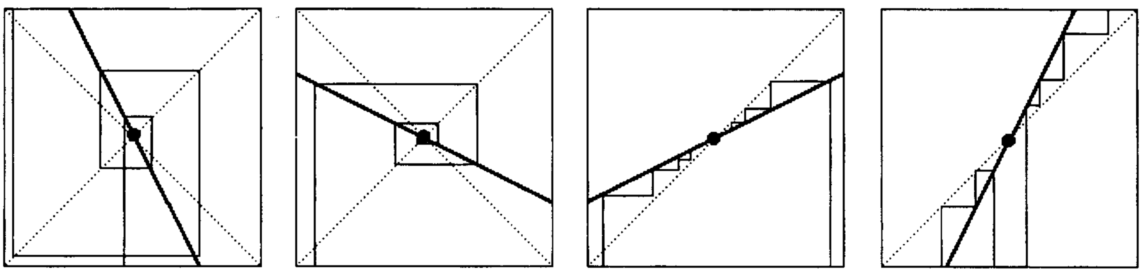
$-1/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow$ ___ $\rightarrow$ ___



$-2 \rightarrow -1 \rightarrow$ ___ $\rightarrow$ ___

e) Welchen Einfluss hat die **Lage des Startpunktes** auf das Verhalten der Iteration?

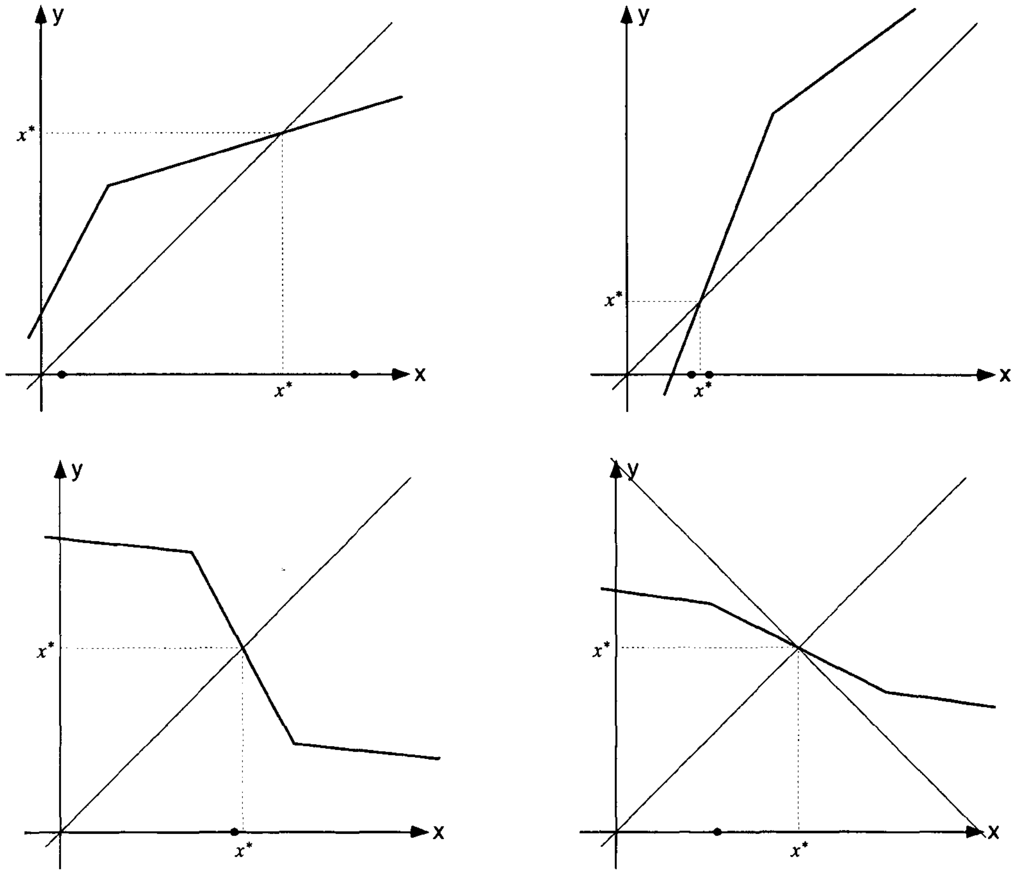
f) Beschreibe den Einfluss der **Steigung** der Geraden auf das Verhalten der Iteration anhand der folgenden vier Fälle.
- Setze in der 1. Zeile den Steigungsbereich ein, z.B. $0 < a < 1$.
- Beschreibe in der 2.Zeile die Form der Iterationslinie mit „Treppenlinie“ oder „Spirale“.
- Beschreibe in der 3.Zeile den Charakter des Fixpunktes mit „Attraktor“ oder „Repeller“.



g) Beschreibe, wie sich das Verhalten der Iterationslinie ändert, wenn die Steigung der Geraden langsam
- von −1,1 auf −0,9
- von −0,1 auf 0,1
- von 0,9 auf 1.1
wächst.

h) Beschreibe die „Iterationslinie“ für die Geradensteigungen $m = -1$ und $m = 1$.

i) Beschreibe die Iterationslinien für die folgenden **stückweise linearen** Funktionen ausgehend von den jeweils markierten Startpunkten auf der x-Achse und begründe anhand der Steigungen. Kann es **mehrere** Attraktoren geben?


y
x
x^*
x^*
y
x
x^*
x^*
y
x
x^*
x^*
y
x
x^*
x^*