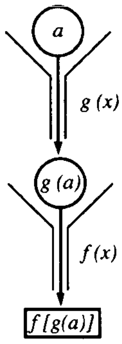
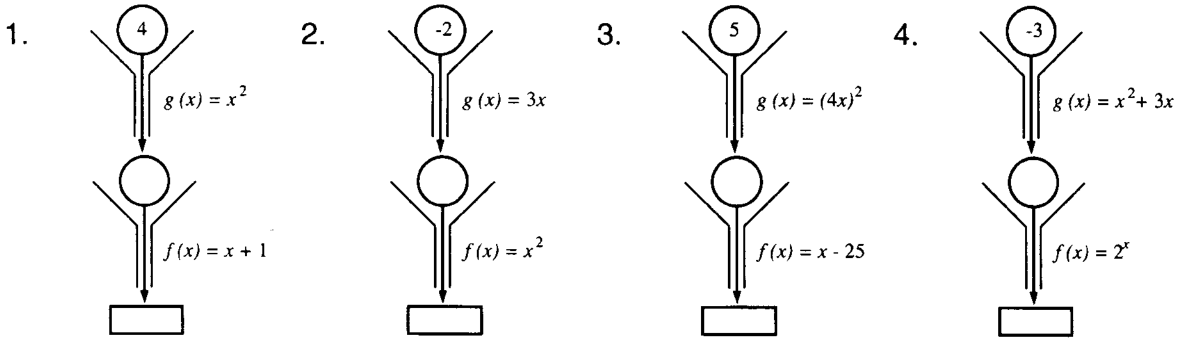
9.4.2. Rechnerische Iteration



Eine Iterationsfolge entsteht durch wiederholte Anwendung bzw. **Verkettung** der gleichen Funktion. Bei der Verkettung f(g(x)) zweier Funktionen rechnet man von innen nach außen, d.h. man setzt den x-Wert in g ein und das Ergebnis g(x) in f. Anschaulich lässt sich die Verkettung als Hintereinanderschaltung zweier Produktionsschritte darstellen:

a) Vervollständige die folgenden Diagramme:



b) Gegeben sind die Funktionen f(x) = 2x + 5 und g(x) = $\frac{1}{2}$x − 5. Berechne die folgenden Terme:

f(g(1)) = _____ g(f(1)) = _____ g(g(1)) = _____ f(f(1)) = _____

c) Gegeben sind die Funktionen f(x) = x^2 und g(x) = x + 1. Berechne die folgenden Terme:

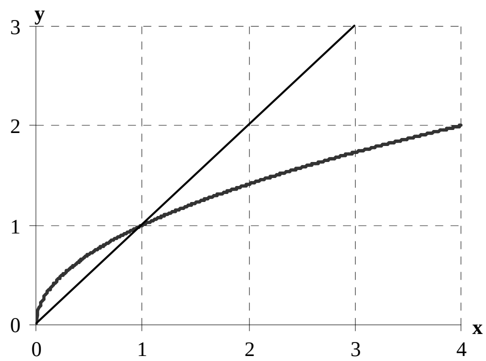
f(g(x)) = ________ g(f(x)) = _________ g(g(x)) = _________ f(f(x)) = _________

Bei einer **Iteration** wird eine Funktion fortlaufend mit sich selbst verkettet, d.h., man wendet die Funktion wiederholt auf ihr eigenes Ergebnis an. Man erhält aus einem Startwert x_0 eine Folge von **Iterationwerten:**

$$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \rightarrow x_4 = f(x_3) \rightarrow \ldots \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

d) Berechne die ersten 8 Iterationswerte der Folge $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ mit dem Startwert x_0 jeweils auf 3 signifikante Stellen genau:

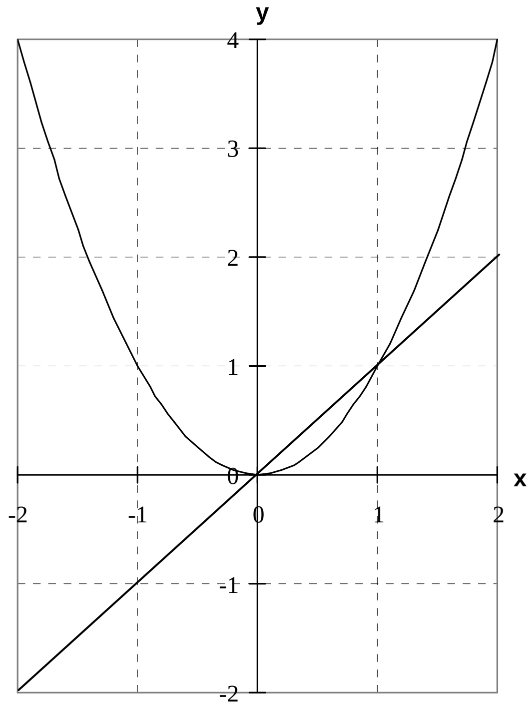
x_0	0,2	0,85	64	1850
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				
x_5				
x_6				
x_7				
x_8				



e) Beschreibe das Grenzverhalten der vier Folgen mit Hilfe der Begriffe „Attraktor“ und „Treppenlinie“ und begründe es mit Hilfe der Steigung der Wurzelfunktion anhand des Graphen.

f) Berechne die ersten 8 Iterationswerte der Folge $x_{n+1} = x_n^2$ mit dem Startwert x_0 jeweils auf 3 signifikante Stellen genau:

x_0	−3	0,2	1	5
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				
x_5				



g) Beschreibe das Verhalten der Folge der Iterationswerte mit den üblichen Begriffen „Treppenlinie“, „Spirale“, „Attraktor“ und „Repeller“ in Abhängigkeit von der Lage des Startpunktes x_0. Begründe mit Hilfe der Steigung der Normalparabel anhand des Graphen:

$x_0 < -1$	
$-1 < x_0 < 0$	
$0 < x_0 < 1$	
$1 < x_0$	

h) Bestimme die Funktion, die die folgenden Iterationswerte erzeugt:

$4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to \ldots$ f(x) = ________________

$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to \ldots$ f(x) = ________________

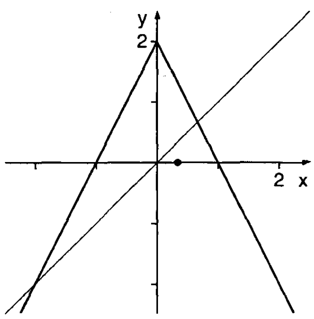
$1 \to -3 \to 9 \to -27 \to 81 \to \ldots$ f(x) = ________________

$-6 \to -1 \to 4 \to 9 \to 14 \to \ldots$ f(x) = ________________

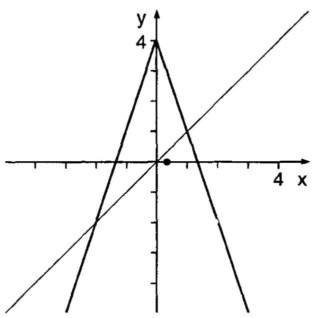
$8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 0{,}5 \to \ldots$ f(x) = ________________

i) Eine Folge heißt **arithmetisch**, wenn die **Differenzen** zweier aufeinander folgender Glieder gleich sind: $a_{n+1} = a_n + d$ bzw. $a_n = a_0 + n \cdot d$.
Eine Folge heißt **geometrisch**, wenn die **Verhältnisse** zweier aufeinander folgender Glieder gleich sind: $a_{n+1} = r \cdot a_n$ bzw. $a_n = a_0 \cdot r^n$.
Welche der Folgen in h) sind arithmetisch und welche sind geometrisch?

j) Beschreibe die Iterationslinien der folgenden beiden stückweise linearen Betragsfunktionen ausgehend vom Startwert $x_0 = 1/3$. Vergleiche das Verhalten der rechnerisch ermittelten Folge mit der graphisch bestimmten Iterationslinie.



$y = -2|x| + 2$



$y = -3|x| + 4$

	$y = -2\|x\| + 2$	$y = -3\|x\| + 4$
x_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		
x_5		
x_6		