9.5.6. Rechnerische Fehlerfortpflanzung mit dem GTR

Zur Untersuchung der Fortpflanzung von kleinen Rundungsfehlern im GTR verwenden wir das folgende Programm. Dabei gibt man Streckfaktor A, Startwert X und Zahl der Dezimalstellen F ein und lässt dann 7 Iterationen durchführen. Nach jedem Schritt ist eine Pause zum abschreiben, die durch ENTER beendet wird:

```
prgm trunc
1   :ClrHome
2   :Prompt A, X, F
3   :For (N,0,7,1)
4   :AX(1−X) → X
5   :IPART((10^F)X)/(10^F)→X
6   :Disp N
7   :Disp X
8   :Disp ‘’ ‘’
9   :Pause
10  :End
```

a) Führe die folgenden Iterationen mit F = 5 aus und notiere die Iterationswerte auf 3 Nachkommastellen genau:

$f_{2,8}(x) = 2{,}8 \cdot x(1 - x)$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,100							
0,450							
0,700							

$f_{3,2}(x) = 3{,}2 \cdot x(1 - x)$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,100							
0,450							
0,700							

$f_4(x) = 4 \cdot x(1 - x)$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,100							
0,450							
0,700							

b) Vergleiche das Verhalten der numerischen Werte mit den graphischen Iterationslinien aus Abschnitt 9.5.1 – 3. Lässt sich das zu erwartenden Verhalten (Konvergenz, Periodizität, Chaos) auch aus den Wertetabellen erkennen?

c) Vergleiche nun alle drei Iterationen mit Startwert x_0 = 0,100 bei größerem Fehlerintervall mit F = 3:

a	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2,8	0,100							
3,2	0,100							
4,0	0,100							

d) Berechne die relative Abweichung der Endwerte x_7 bei teration mit 3- und 5-stelliger Genauigkeit in Prozent. Wo ist die Abweichung am stärksten?

e) Um herauszufinden, ob die starken Abweichungen bei a = 4 bei höherer Rechengenauigkeit zurückgehen, führen wir jetzt 12 Iterationschritte mit Streckfaktor a = 4 und Startwert x_0 = 0,1 durch und untersuchen die Zunahme der Abweichung im 6. – 12. Schritt. Im Programm muss dazu in Zeile 3 die 7 durch die 12 ersetzt werden.

Iterationsschritt	10 Stellen genau	3 Stellen genau	Abweichung
0	0,100 000 000 0	0,100	0,000
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Die Abweichungen gehen nicht zurück, sie brauchen nur etwas länger, um bis zur 3. Stelle vorzudringen. zum Schluss untersuchen wir, wie lange ein Fehler in der 10. Stelle braucht, um bis zur 3. Stelle vorzudringen. Dazu muss die Zahl der Iterationsschritte in Zeiele 3 auf 30 erhöht werden:

Iterationsschritt	10 Stellen genau	10 Stellen genau	Abweichung
0	0,100 000 000 0	0,100 000 000 1	0,000
10			
20			
25			
30			

f) Der Meteorologe Edward Lorenz am Massachusetts Institute of Technology MIT veröffentlichte 1979 einen Artikel zu diesem Thema mit dem Titel „Predictability: Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?“ Übersetz und nimm begründet Stellung zu dieser Frage.